

Sulle disequazioni

Disequazioni di primo grado, sistemi di disequazioni di primo grado

Specificazione operativa e scopo

Il gruppo di tirocinio ha scelto di seguire una serie di lezioni in classe prima (siamo a maggio) che vertono sul seguente argomento: *Disequazioni di primo grado, sistemi di disequazioni di primo grado*.

Si tratterà di 3 lezioni di un'ora: nella prima si introdurranno le disequazioni e i sistemi di primo grado, nella seconda si tratteranno le disequazioni letterali, le disequazioni di grado superiore al primo in cui il polinomio risulti scomponibile in fattori di primo grado e le disequazioni fratte, e nella terza lezione un po' di riepilogo rimescolerà le cose viste.

Si è analizzato nei dettagli quello che succede in classe (una classe prima liceo di scienze applicate) nel percorso riguardante un argomento.

Si è pensato di descrivere dettagliatamente la lezione, quasi come se fosse una recita evidenziando quanto meglio possibile ciò che accade nei due fronti: prof e alunni.

Alla fine di queste lezioni, aveva anticipato il prof, gli alunni dovranno essere in grado di risolvere disequazioni e sistemi di disequazioni, ragionando sul **significato di soluzione**; la lezione la faranno gli alunni, collegando cose che già sanno tramite suggerimenti del loro insegnante. Soprattutto, gli allievi dovranno conoscere il significato dei simboli e appropriarsi del **concetto di equivalenza logica**.

Traccia della prima lezione, prevista per il 5 maggio.

Si vogliono introdurre le disequazioni e i sistemi di disequazioni di primo grado.

Prerequisiti: equazioni di primo grado (principi di equivalenza)
Il connettivo logico $\wedge$

[NB] le equazioni di primo grado sono l'argomento immediatamente precedente a quello che vogliamo trattare noi, mentre la parte di logica e insiemistica è stata trattata in modo approfondito all'inizio dell'anno. Gli allievi sono abituati a usare il connettivo logico *and* anche quando, per esempio, mettono le condizioni di esistenza nelle equazioni fratte, dove:

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ significa } x \neq 3 \wedge x \neq 1 ,$$

condizioni che gli allievi hanno imparato a mettere "a sistema" con "l'equazione fratta divenuta intera":

$$\frac{2}{x-3} = \frac{5}{x-1} \quad \text{è equivalente a} \quad \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \\ 2(x-1) = 5(x-3) \end{cases}$$

Deprecabile l'uso di lasciare le C.E. isolate nel foglio "in alto a destra".

Gli alunni riconosceranno la disequazione come un predicato aperto, quindi l'insieme delle soluzioni sarà esattamente l'insieme di verità del predicato.

Si passa a come rappresentare per esempio l'insieme di verità della disequazione " $x > 5$ ".

Si proporrà il grafico con il quadratino al posto delle classiche palline piene o vuote a indicare l'estremo compreso o non compreso nell'insieme perché il prof ritiene renda meglio l'idea di quello che si vuole rappresentare, e cioè l'idea della parentesi quadrate per esprimere un intervallo aperto o chiuso. Inoltre, l'uso dei quadratini al posto dei pallini evita la confusione di pallini (nei grafici di intersezione) con zeri nei grafici di segno).

Per identificare l'intersezione tra insiemi verrà proposto come prima rappresentazione grafica quella di Eulero-Venn; ma quando si ha un sistema di disequazioni, si converrà che tale rappresentazione è scomoda.

Obiettivi: risolvere disequazioni e sistemi di disequazioni di primo grado e interpretare il significato del sistema.

Le basi di logica e di insiemistica permettono di "fare" i passaggi; questo è il risultato atteso.

Obiettivo del Prof. La lezione sarà una lezione standard, ma fondamentale per la preparazione di base degli studenti, un argomento assolutamente da padroneggiare. La lezione la devono fare i ragazzi.

Criticità prevista dal prof: nessuna.

LE ASPETTATIVE della PRIMA LEZIONE (Dall'uguaglianza alla disuguaglianza)

Gli alunni devono svolgere la lezione sollecitati dagli input proposti dal professore ripensando alle loro conoscenze e sviluppando le nuove strutture.

Primo esercizio proponibile, per esempio: $x + 5 > 8$

Ci si aspetta che gli allievi riconoscano la nuova struttura come predicato aperto e da questo elemento determinino la soluzione; ci si aspetta anche una soluzione a mente. Ci si aspetta una soluzione anche nel caso si usi il predicato composto " $> =$ ":

$x + 5 \geq 8$ è equivalente a $x + 5 > 8$ *vel* $x + 5 = 8$

Criticità: introduzione nuova rappresentazione grafica della soluzione. Inoltre esiste la criticità nel ruolo dell'estremo.

Secondo esercizio proponibile, per esempio: $2x + 3 > x + 8$:

Ci si aspetta che gli allievi comprendano che per affrontare la disequazione è possibile applicare il primo principio di equivalenza estendendolo dall'equazione alla disequazione. Ridefinizione del primo principio.

Terzo esercizio proponibile, per esempio: $3x + 3 > x + 8$

Conseguenza del precedente ci si aspetta che gli allievi ora comprendano di affrontare la soluzione applicando il secondo principio di equivalenza estendendolo alla disequazione.

Quarto esercizio proponibile, per esempio: $2x + 3 > 5x + 9$

Ci si aspetta che gli allievi affrontino come sopra la soluzione dell'esercizio, ma con le dovute osservazioni di verifica del risultato sollecitato dal Prof riconoscano che la soluzione non è corretta (avranno ommesso di cambiare il verso della disuguaglianza), e quindi comprendano di aver commesso un errore tramite il procedimento di verifica proposto. Ci si aspetta che inizialmente non sappiamo capire dove sta l'errore. Successivamente il Prof ridefinirà il secondo principio nel caso delle disequazioni, e ci si aspetta che gli allievi scrivano sotto dettatura del Professore.

Quinto esercizio proponibile, un sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x + 4 > x - 1 \\ 2x + 9 < 4x - 5 \end{cases}$$

Ci si aspetta che gli allievi individuino la soluzione come intersezione delle soluzioni delle disequazioni. Inoltre che convengano, assieme al Prof, che la rappresentazione di Eulero - Venn, per determinare la soluzione e dagli allievi conosciuta, è scomoda e che è necessario introdurre una nuova rappresentazione: il grafico di intersezione.

Traccia della seconda lezione, prevista per l'8 maggio.

La lezione dovrà iniziare con la verifica di quanto fatto la lezione precedente tramite correzione alla lavagna di esercizi che proporranno gli alunni.

Si procederà poi all'introduzione delle disequazioni letterali e quindi alla DISCUSSIONE che gli alunni hanno già visto relativamente alle equazioni e, esattamente come nella prima lezione, saranno chiamati a "tirar fuori da sé" quello che già sanno, facendo "fare" a loro la lezione, per poi aggiornare le conoscenze con quanto di nuovo ci sarà.

Probabilmente l'esercizio verrà proposto alla lavagna da un alunno.

Novità: nella discussione sui parametri della disequazione non sarà più possibile fermarsi al solo caso $a \neq 0$, ma il $\neq$ andrà distinto in $<$ e $>$.

Si procederà poi all'introduzione di **disequazioni di grado superiore al primo** e in parallelo all'introduzione delle **disequazioni fratte** proprio per evidenziare la "quasi" completa equivalenza tra i due casi, in modo tale da farli rientrare in un'unica tipologia di risoluzione.

Si introdurrà allora la parte fondamentale di questo argomento: **IL GRAFICO DI SEGNO**, con una sua buona costruzione, che nelle attese dell'insegnante eviterà, adesso e in futuro, fraintendimenti tra grafico del segno e grafico di sistema.

Si utilizzeranno le conoscenze pregresse degli alunni per studiare il segno di un prodotto, o di un rapporto.

Nel grafico del segno relativo al prodotto si evidenzieranno gli zeri dei polinomi.

Nel grafico del segno relativo al rapporto si evidenzieranno gli zeri dei polinomi, ma anche la non esistenza (con quantificatori) della frazione per alcuni valori, gli zeri del denominatore.

Obiettivi: RISOLVERE disequazioni con discussione, di grado superiore al primo e fratte con particolare attenzione al grafico del segno.

Le buone basi degli alunni e il modo di procedere che l'insegnante avrà saputo trasmettere alla classe in questo anno permetteranno agli alunni di costruire la lezione e di rielaborarla integrando le nuove conoscenze con quelle che già hanno, dando continuità e coerenza agli argomenti proposti.

Obiettivo del Prof. Che riescano a fare il grafico del segno in modo assolutamente non meccanico, ma ragionato; che riescano a differenziare (anche graficamente) con sicurezza e spontaneamente il grafico del segno dal grafico di sistema evitando futuri fraintendimenti.

Le aspettative della seconda lezione (discussione e scomposizione)

Aspettativa principale: Gli alunni ridefiniranno gli elementi della discussione conosciuta nelle equazioni affrontando la discussione nelle disequazioni. Saranno costretti inoltre a recuperare le loro conoscenze sulle scomposizioni per affrontare la risoluzione di disequazioni superiori al primo grado.

Primo esercizio proponibile, per esempio: $3ax - a - 6a > -2 + 4ax$.

Aspettativa: Che gli allievi affrontino la risoluzione per i passaggi necessari senza alcun problema e che riescano a individuare la necessità di porre a diverso da zero per poter effettuare una divisione opportuna, collegandosi al secondo principio sulle disuguaglianze ridefinito nella prima lezione.

Secondo esercizio: si basa su una disequazione di grado superiore al primo (ma di tipo scomponibile) e su una disequazione fratta.

Per affrontare la disequazione di grado superiore al primo ci si aspetta che gli allievi applichino le conoscenze sulle scomposizioni, ma specialmente che riconoscano i fattori come elementi di un prodotto. Ripensando allora alla regola dei segni riescano a determinare il segno dei singoli fattori e quindi il segno del polinomio: questo ultimo passaggio con aiuto del Prof.

Comprendano quindi l'equivalenza del segno sia nel caso di prodotti di fattori sia nel caso di rapporti di fattori, per la disequazione fratta.

Per la parte frazione ci si aspetta che gli allievi identifichino il problema del denominatore diverso da zero od uguale a zero (su probabile sollecitazione del Prof).

Dovrebbero, alla domanda del prof, ripensare ai quantificatori, ricordandosi il significato di non esiste: comprendere di conseguenza che è necessario tenere conto dei casi per cui il denominatore si annulla identificandoli come non esistenti...

Traccia della terza lezione prevista per il 10 maggio

Questa lezione vuole essere un po' di riepilogo e sintesi di quanto fatto nelle lezioni precedenti perché le nozioni date sono comunque molte e necessitano, non solo di comprensione, ma anche del tempo necessario a consolidarsi.

Si proporrà un esercizio di riepilogo alla lavagna che verrà svolto da un alunno volontario supportato da tutta la classe e dal prof.

Sarà una disequazione fratta con scomposizione di numeratore e denominatore.

Si porrà l'attenzione degli alunni sul grafico che probabilmente presenterà dei problemi, perché non banale.

Il prof, concluso il grafico, ricorderà la presenza di C.E. congiunte a sistema e mostrerà loro come "ricordarla" da subito nel grafico del segno, e ribadirà i concetti di esistenza e di non esistenza.

Si proporrà poi un'altra disequazione fratta più semplice e per finire si assegneranno i compiti per casa che consisteranno in un esercizio scritto alla lavagna dal prof. e non preso dal libro: un sistema con una disequazione fratta e una di grado superiore al primo scomponibile che per essere risolto avrà bisogno di 2 grafici del segno e 1 si sistema.

Obiettivo del prof: chiudere questa parte dell'argomento, dare loro una visione di insieme, vorrebbe averli condotti in un argomento nuovo riadattando le conoscenze pregresse senza creare strappi.

Obiettivo: fare il grafico di segno e di sistema, rappresentare le informazioni.

Criticità prevista dal prof: quantità notevole di informazioni che rischia di creare confusione se non viene dato il tempo di assimilarla.

LE ASPETTATIVE della TERZA LEZIONE (ancora sul grafico)

In questa lezione si propongono esercizi. In linea di massima non ci saranno novità di contenuti. Ci si aspetta da parte di allievi domande di chiarificazione.

È lecito aspettarsi delle difficoltà sulla formulazione e comprensione del grafico del segno.

NB₂ *In appendice ci sono le tre lezioni come **realmente** accadute.*

Non so se una cosa del genere si possa scrivere, se sia bello o opportuno scriverla, in ogni caso ritengo che la trascrizione delle lezioni sia la parte più bella di questa relazione, io le ho rilette varie volte e sempre mi piacciono e mi fanno sorridere.

COSA ABBIAMO OSSERVATO

Alunni: Attenzione, partecipazione, coerenza degli interventi e problemi manifestati
Prof: Modalità di svolgere la lezione

Durante le lezioni la classe ha sempre partecipato in modo attivo e produttivo alla lezione, soddisfacendo così le aspettative del prof, non ci sono assolutamente difficoltà a far svolgere agli allievi gli esercizi alla lavagna, anzi piuttosto c'è da gestire "la coda"; gli alunni sono consapevoli della chance che gli viene data di svolgere personalmente gli esercizi alla lavagna avendo così una spiegazione ulteriore e personalizzata.

L'attenzione c'è durante l'intera lezione, anche se non corrisponde assolutamente al silenzio: gli alunni, anzi, colgono i momenti di pausa per scherzare tra di loro e anche con noi, senza che questo influenzi in modo negativo la lezione, anzi la rende più vivace e divertente. Rispondono sempre se interpellati, ma c'è anche un grande lavoro di gruppo classe che viene visto, da chi è alla lavagna come un aiuto, non come un anticipare le sue risposte e metterlo in difficoltà.

Difficoltà emerse:

Durante la prima lezione: Alcuni alunni: tutti i numeri minori di 3

Caio dice: tutti i numeri da 2 in giù!!!

Prof: devi pensare ai reali, non ai naturali o agli interi!!

Difficoltà da parte di qualcuno a pensare ai numeri reali e quindi a identificare $x < 3$.

Durante la seconda lezione.

$a < 0$
$x > \frac{2-7a}{a}$
$S = \left] \frac{2-7a}{a}; +\infty \right[$
Posso dividere? SI
NB l'allieva voleva cambiare il segno di a

Difficoltà a comprendere che a è negativo "dentro di lui" anche se davanti non c'è il segno " - ".

Il prof. riesce a far fare la lezione ai suoi alunni dando solo gli input necessari, la lezione non si può certo definire frontale, si potrebbe dire che è di gruppo, tutti partecipano e il prof. coordina, raddrizza il tiro e alla fine struttura quanto detto dai suoi alunni. Li ha ovviamente abituati a questo modo di fare lezione e riesce a mantenere l'attenzione. Se qualcuno si distrae troppo viene richiamato e la classe si acquieta come per magia al semplice richiamo a voce un po' più alta.

È una classe davvero bella composta da ragazzi svegli, interessati e allegri.

IMPRESSIONI

Sedendomi tra i banchi avrei voluto che la classe fosse "mia", ho infatti colto fra gli allievi un atteggiamento di non timore nei confronti sia della materia sia dell'insegnante, grazie ai seguenti indicatori:

- La volontà di molti di andare alla lavagna per svolgere l'esercizio;
- La collaborazione di tutti per risolvere l'esercizio proposto;
- La partecipazione alla correzione di un eventuale errore fatto dall'allievo alla lavagna per dare un vero aiuto (mai derisione dell'errore altrui);
- Il costante interesse per quanto proposto sia dall'insegnante, senza distrazioni esterne del tipo: "devo andare in bagno", "sta finendo l'ora".
- La capacità di staccare un attimo per una battuta senza degenerare e rientrare quindi subito nell'argomento dopo un attimo di sana pausa.

A proposito del non deridere un compagno che sbaglia, il nostro atteggiamento nei confronti dell'errore (che l'allievo può fare) è sempre adeguato? Oppure a volte abbiamo la tendenza di valorizzare e premiare la risposta esatta e invece sorvolare sull'errore banalizzandolo? Di dire: "Non hai studiato", "Non si fa così" e di spiegare l'errore solo a chi lo fa? Forse dobbiamo sfruttare l'errore come occasione di approfondimento e di recupero di quell'argomento, dedicandoci tempo e risorse, così potremmo anche creare il giusto atteggiamento verso gli sbagli altrui che possono diventare occasioni di crescita per tutti, non solo di crescita didattica, e non momento superficiale di scherno.

La modalità di fare lezione dall'insegnante proponeva un continuo richiamo di conoscenze già acquisite dagli allievi per introdurre le nuove (come esempio nella prima lezione l'introduzione delle disequazioni); l'insegnante è riuscito a condurre gli allievi a quanto voleva introdurre in modo abbastanza autonomo (*"come cambia il verso della disequazione moltiplicando per un numero negativo"*); al momento di introdurre qualcosa di effettivamente nuovo, e per gli alunni non deducibile da quanto già sapevano, il gruppo classe "voleva" sapere la nuova nozione non essendo riuscito da solo a trovare "la risposta". Sostanzialmente la mia sensazione era che il gruppo classe desiderasse acquisire la nuova nozione perché senza non era in grado di progredire e di affrontare la nuova problematica proposta, l'insegnante era riuscito a spiegare qualcosa di nuovo non perché era scritto nel programma, ma perché aveva mostrato loro l'importanza di quell'argomento.

Per me la bravura dell'insegnante è stata proprio l'aver sfruttato a pieno le conoscenze del gruppo, aver valorizzato quello che il gruppo già sapeva (non ha cominciato dicendo: "adesso vi spiego IO le disequazioni", ha scritto alla lavagna una semplice disequazione e ha chiesto cos'era, da lì è partita la discussione matematica e l'azione formativa del gruppo classe) e grazie a semplici input l'essere arrivato a costruire la nuova conoscenza.

In questo modo ha ottenuto l'attenzione e l'interesse massimo nel momento in cui lui ha fornito la nuova nozione. Io credo che in quel momento tutti gli allievi abbiano prestato attenzione e abbiamo compreso la nuova informazione, dato che erano desiderosi di averla.

Per me questa lezione è stata molto istruttiva dal punto di vista didattico perché mi ha fatto vedere la validità di questo tipo di strategia; ognuno ha il suo stile certo, ma la modalità attuata dall'insegnante con quel gruppo classe è senz'altro vincente e quindi mi ha insegnato qualcosa da fare.

RIFLESSIONI PERSONALI SU quanto ho potuto vedere

[...]

Un'altra cosa che mi ha colpito è stata la rapidità, ma allo stesso tempo la chiarezza, con la quale l'insegnante ha affrontato l'argomento, ha saputo dare tutte le informazioni necessarie e ha saputo "sfruttare" la classe per giungere al traguardo prefissato, non ha banalizzato l'argomento, ma ha saputo renderlo facile e alla portata di tutti i componenti della classe; la sensazione era che nessuno era stato "perso" per strada e che anzi tutti erano sulla lunghezza d'onda giusta. Si era creato l'atmosfera giusta per fare e per imparare.

Io credo che arrivare a questo sia un grande risultato, e penso che se alla fine dell'anno anche un solo studente, che inizialmente era demotivato o scettico riguardo alle sue capacità, mi guarda in modo diverso, anzi guarda alla (materia) matematica in modo positivo e propositivo, sento che il mio lavoro non è stato vano; certo la mia esperienza è di istituti professionali dove le difficoltà sono molte per noi insegnanti perché molte sono le problematiche personali che la maggior parte degli studenti ha, perciò è stato entusiasmante entrare in un liceo scientifico e vedere la voglia e l'interesse che hanno questi studenti.

Approfondimento

Rivedendo a distanza di tempo il materiale prodotto mi sono soffermata su alcuni eventi delle tre lezioni e ho provato a pensare perché la tal cosa è successa e come l'avrei gestita io.

Nella prima lezione ho notato che alcuni alunni hanno mostrato perplessità quando si è trattato di scrivere la soluzione della disequazione " $x < 3$ ", infatti alcuni erano convinti che minore di 3 volesse dire da 2 "in giù"! Il professore a lezione li ha corretti dicendo che dovevano pensare ai reali e non ai naturali e poi ha proseguito la lezione. Io cosa avrei fatto? Credo che il quel momento fosse prioritario proseguire la lezione e non entrare in digressioni, ma l'errore è importante, io e Claudio quando abbiamo sentito quell'alunno ci siamo guardati e abbiamo detto: "hai sentito?" In effetti è uno di quegli errori che io mi aspetto, proprio perché siamo tutti "troppo affezionati" ai naturali, ci vengono proprio... naturali. In prima si dedica un bel po' di tempo per parlare dei numeri naturali e poi dei numeri interi e poi dei numeri razionali; non sempre si dedica invece del tempo per i valori approssimati, per dire che $\mathbb{Q}$ non è completo (basta fare la dimostrazione dell'irrazionalità della radice di 2 che mi pare semplice) e per dare a questo punto almeno la nozione intuitiva dei numeri reali. Ma allora io cosa avrei fatto? O cosa farò? Probabilmente tirerei dritto anch'io, ma alla prima occasione riprenderei l'errore fatto quella lezione come spunto per fare chiarezza.

Un'altra cosa che mi aveva fatto piacevolmente sorridere era stata la domanda di quell'alunno che chiedeva il perché del punto e virgola tra gli estremi dell'intervallo: questa bella domanda potrebbe essere lo spunto futuro proprio per parlare delle tante convenzioni che si utilizzano. Del perché ci sono alcune convenzioni e non altre, ma anche per dire che appunto sono "solo" convenzioni, si tratta di scelte che sono state fatte e hanno portato ad alcuni risultati, si è deciso in quel modo, ma si poteva scegliere anche diversamente.

Per concludere la prima lezione: come si scrivono le soluzioni? Succede spesso che gli alunni, e non solo loro, quando arrivano a " $x < 3$ " ritengano di aver concluso (cosa vera per chi ritiene x incognita e non variabile); ovviamente non è così, se parliamo di equivalenze logiche; magari si dà per scontato "l'ultimo passaggio", quello della scrittura delle soluzioni,

ma io credo invece che la precisione sia assolutamente necessaria, che si debbano usare i simboli e le parole corrette se si vuole che quello che facciamo non sia un meccanico calcolo, ma che resti vivo in suo significato.

Nella seconda lezione quello che ricordo assolutamente in modo chiaro è la spiegazione fatta alla lavagna contemporaneamente delle disequazioni di grado superiore al primo e delle disequazioni fratte; io avevo fatto sempre prima l'una e poi l'altra riprendendo le analogie, credo invece che come le ha proposte il prof sia il modo migliore, perché ha fatto chiaramente vedere che si ragiona nello stesso modo, ha fatto pensare ai ragazzi alla regola dei segni e li ha condotti alla soluzione lavorando ancora una volta, come nella prima lezione, sulle loro conoscenze pregresse.

La questione del soggetto, dotato di segno, precede quella della ricerca dell'insieme di verità di un predicato aperto.

Il prof ha introdotto il grafico di segno in modo diverso da quello che ho sempre utilizzato io e di nuovo mi sono trovata a pensare che la sua proposta era migliore della mia, mi è piaciuto molto come si evidenziano gli zeri del numeratore (0 appunto) e quelli del denominatore e che il simbolo di non esistenza compaia solo a livello del segno della frazione, così come credo pure che **il fatto di mettere + e - al posto di linea continua e linea tratteggiata sia utile per evitare confusione con il grafico di sistema:** spesso gli alunni confondono le due cose, a loro sembra solo una banale svista, invece l'errore è proprio di fondo. Forse differenziando in questo modo i due grafici si può dare un aiuto a chi è più debole e accompagnarlo ancora un po', almeno in classe prima. Credo che alcune volte semplificare, non banalizzare, sia utile per non perdere per strada alunni meritevoli che magari non hanno ancora scoperto l'amore per questa materia, ma che lo scopriranno a breve e saranno anche in grado, in futuro, di approfondire. Di nuovo in meno di un'ora ho dovuto ripensare a quello che avrei fatto io e a quello che potevo osservare sia nei confronti del prof che nei confronti degli alunni e di nuovo mi sono trovata a pensare che la proposta che mi veniva mostrata era buona, migliore di quella che avrei offerto io. A mio pro posso dire che sono disposta a cambiare, anzi in questo caso lo faccio con piacere.

APPENDICE: IL REALMENTE ACCADUTO

PRIMA LEZIONE

L'insegnante scrive alla lavagna: $x + 5 > 8$

Prof: Qual è il titolo della lezione di oggi? (Un attimo di silenzio) Se avessi scritto $x + 5 = 8$ quale sarebbe stato?

Alunni: Equazione

Prof: bene adesso il titolo è "Disequazioni"

Prof: che cos'è una disequazione?

Sara: una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni algebriche.

Prof: cosa vuol dire algebriche?

Caio: che c'è una incognita

Prof: e quindi cosa devo fare?

Caio: devo risolvere

Prof: e cioè?

Sara: devo "renderla" vera.

Prof: Io la devo rendere vera? " $x + 5 > 8$ " è vera o falsa?

Alunni: è aperta

Prof: quindi risolvere significa trovare i valori che sostituiti all'incognita rendono vera la disuguaglianza. A mente quali sono secondo voi le soluzioni?

Un alunno: da 3 in su vanno bene. Il 4, il 5, ...

Prof: 3,1 va bene?

Un altro alunno: sì perché $3,1 + 5$ è più grande di 8

Prof: allora basta che siano maggiori di 3 e non 3.

Come possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni? $S = ?$

Ci sono due modi per rappresentare le soluzioni: uno è quello grafico (una semiretta con quadratino vuoto per estremo)... ma è scomodo; l'altro è quello simbolico:

$S =]3; +\infty[$

Attenzione: la parentesi quadra dà le spalle al 3 perché ricorda il $\square$ vuoto, ci ricorda che il 3 non fa parte dell'insieme delle soluzioni.

Prof: se avessimo avuto " $x + 5 \geq 8$ " avremmo ottenuto: $S = [3; +\infty[$

Un alunno: perché c'è il punto e virgola?

Prof: è una convenzione per separare gli estremi; l'uso della semplice virgola o del punto avrebbe generato confusione.

Prof: adesso ne risolviamo una un po' più difficile: $2x + 3 > x + 8$

Si può "portare di là"? Posso togliere a destra e a sinistra? Vale il primo principio di equivalenza?

Alunni: sì

Il prof. detta: 1° principio di equivalenza per le disequazioni: Aggiungendo o togliendo la stessa quantità a destra o sinistra si ottiene una disequazione equivalente.

Prof: Cosa vuol dire equivalente?

Alunni: che ha le stesse soluzioni.

Prof: bene, allora applicando il primo principio vale la "cosiddetta regola del trasporto" che altro non è se non l'applicazione del I principio, e quindi la disequazione $2x + 3 > x + 8$ diventa $x > 5$

Prof. Quali sono le soluzioni?

Diversi alunni: $S =]5; +\infty[$

Prof: adesso una ancora più difficile $3x + 3 > x + 1$

Prof. quali sono le soluzioni?

Alunni: applichiamo il primo principio e diventa: $2x > -2$

Prof: e adesso?

Alunni: divido per 2

Prof: posso senza problemi?

Alunni: sì

Prof: bene allora diventa $x > -1$ le cui soluzioni sono tutti i reali più grandi di -1 e cioè: $S =]-1; +\infty[$

Prof: Adesso facciamo la più difficile di tutte!!!

$$x + 2 > 3x - 4 \quad (*)$$

Prof: Alberto suggeriscimi quello che devo fare.

Alberto: applico il primo principio ed ottengo $-2x > -6$

Prof: e adesso?

Alunni: dobbiamo dividere per -2

Prof: facciamolo cosa otteniamo?

$$\text{Alunni: } x > 3 \quad (**)$$

Prof: Dunque, parrebbe che le soluzioni siano i numeri più grandi di 3. Proviamo: 4 rende vera la (**)?

Alunni: sì, perché 4 è maggiore di 3

Prof: giusto, e 4 rende vera anche la (*)?

Alunni: no, perché, sostituendo 4 viene $6 > 8$ che è falsa!!!

Prof: ma allora non sono equivalenti, dove abbiamo sbagliato?

Alunni: SILENZIO

Poi un alunno dice: prof, ci dice dove abbiamo sbagliato?

Prof: vediamo questo esempio: " $3 > 2$ " è vera?

Alunni: Sì

Prof. adesso moltiplico per -10 a destra e a sinistra e ottengo $-30 > -20$. È vera?

Alunni: NO

Prof: per la legge di monotonia, avendo moltiplicato per un numero negativo, devo cambiare il verso della disuguaglianza perché resti vera, e quindi la nostra disequazione di partenza è in realtà equivalente a " $x < 3$ "

Il prof. detta:

2° principio di equivalenza per le disequazioni (diverso da quello per le equazioni)

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero maggiore di zero ottengo una disequazione equivalente; moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero minore di zero devo cambiare il verso per ottenere una disequazione equivalente.

Prof: quindi nel nostro esercizio:

$$x + 2 > 3x - 4 \quad \sim \quad -2x > -6 \quad \sim \quad x < 3$$

le cui soluzioni sono: 3

1. graficamente □

Prof: $S = ?$

Alcuni alunni: tutti i numeri minori di 3

Caio: tutti i numeri da 2 in giù!!!

Prof: devi pensare ai reali, non ai naturali o agli interi!!

Caio: $S =]-\infty; 3[$

Prof: bene, siete in grado di risolvere tutte le disequazioni di primo grado.

Alcuni alunni: prof. non andiamo troppo veloci? Ma questo è programma di prima?

Prof: È programma per la vita.

Prof: E ora nuovo titolo: "Sistemi di disequazioni"

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq x - 1 \\ 2x + 9 < 4x - 5 \end{cases}$$

Prof: che cos'è un sistema di disequazioni? Che simbolo è $\left\{ \right.$?

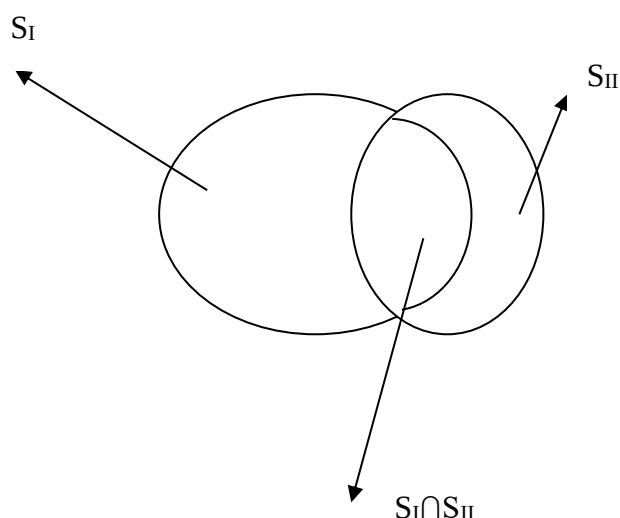
Sara: è un *and*

Prof: e allora quali saranno le soluzioni?

Sara: saranno quelle che vanno bene per entrambe le disequazioni.

Prof: ottimo, Sara.

Il prof detta: risolvere un sistema di disequazioni significa trovare le soluzioni comuni, e quindi alla fine dovrò cercare l'intersezione tra gli insiemi di verità, cioè:



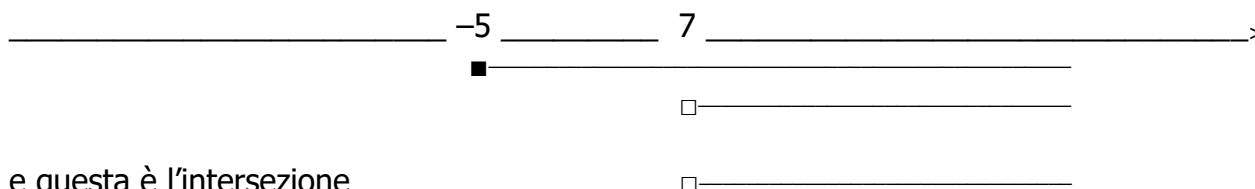
Prof: procediamo con i calcoli:

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ -2x < -14 \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x \geq -5 \\ x > 7 \end{cases}$$

Prof: Quali sono le soluzioni?

Caio: Da 7 in poi, quindi: $S =]7; +\infty[$.

Prof: se fate fatica a vedere le soluzioni, a mente, possiamo fare un grafico, ma non quello sopra, di Eulero-Venn, perché è scomodo, il grafico si fa così:



e questa è l'intersezione

Prof: se ci arrivate a mente non serve farlo. Questo si chiama *grafico di sistema o di intersezione*.

Prof: quante disequazioni posso mettere nella graffa?

Alunni: quante voglio!

Qualcuno: poche!!!

Prof: e se una disequazione non avesse soluzione?

Alunni: nessuna soluzione nemmeno per il sistema.

Prof: perché?

Un alunno: perché l'intersezione è vuota

Prof: Bravi.

A questo punto il prof. fa scegliere a Benedetta i compiti per casa: pag 366 da 82 a 85 3 pag 378 da 200 a 203 e fa porre l'attenzione agli alunni su come scrive il libro le soluzioni:

Prof: State attenti alla fine il libro scrive così: $x > 5$, ma queste non sono le soluzioni, questa è la disequazione equivalente a quella iniziale; voi dovete scrivere $S =]5; +\infty[$, mentre se non ci sono soluzioni scriverete $S = \emptyset$, mentre se le soluzioni sono tutti i reali scriverete: $S = \mathbb{R}$.

SECONDA LEZIONE

Prof.: Correggiamo un po' di disequazioni.

Va alla lavagna Ilenia (volontaria) che sceglie l'esercizio che non le è venuto

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2x - 7 < 1 + x^2 \\ 7x + 1 < 7 + x(x-2) - x^2 + 9x \end{cases}$$

Prof: cosa sono?

Ilenia: due disequazioni di primo grado, perché vedo che il quadrato si semplifica

Ilenia risolve e arriva a:

$$\sim \begin{cases} 0 < 7 \\ 0 < 6 \end{cases}$$

Prof: quando sono vere?

La classe (ma non Ilenia): sono entrambe vere per ogni x appartenente ai reali

Prof: quindi la soluzione è $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Prof: Ilenia dove avevi sbagliato?

Ilenia: niente solo che non riuscivo a scrivere le soluzioni.

Un altro alunno svolge il seguente sistema alla lavagna:

$$\begin{cases} 7x - 1 + x(x-3) + 6 \leq x^2 - 7x + 1 \\ 4x - 7 < 8x + 2 \end{cases} \quad \text{che diventa}$$
$$\sim \begin{cases} x \leq -\frac{4}{11} \\ x > -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Prof: riesci a dire le soluzioni a mente? L'unica cosa alla quale devi fare attenzione è se il $-9/4$ è a sinistra o a destra di $-4/11$.

Alunno: a sinistra.

Prof: e quindi?

$$\text{Alunno: } -\frac{9}{4} < x \leq -\frac{4}{11}$$

Prof: adesso scrivi le soluzioni:

$$\text{La classe suggerisce la risposta: } S = \left] -\frac{9}{4}; -\frac{4}{11} \right]$$

l'alunno alla lavagna non è convinto delle parentesi, il prof. lo fa ragionare sull'intersezione di insiemi, con $\square \text{-----} \blacksquare$

Un alunno dal posto: io non riesco a capire come sono le frazioni tra di loro...

Cioè ha difficoltà a capire, senza ridurre le frazioni ad uno stesso denominatore, quale delle due è la più grande, o la più piccola. (Il prof, senza ridurle allo stesso denominatore, lo fa riflettere sui numeratori e denominatori, differenziando la frazione il cui valore assoluto è minore di 1 da quella il cui valore assoluto è maggiore di 1)

Prof: se i due insiemi fossero stati privi di intersezione quali sarebbero state le soluzioni?

Un'alunna: $S=\{ \}$

Prof: Allora siamo pronti per: Titolo: Disequazioni letterali

Alunni: nooooooooooooo

Prof: cosa saranno?

Caio: ci saranno a e b e quindi saremo costretti a discutere!

Alla lavagna il prof scrive $3ax - a - 6a > -2 + 4ax$

Prof: cosa facciamo?

Caio: x a sinistra e tutto il resto a destra come al solito.

La disequazione diventa: $-ax > 7a - 2$

Prof: possiamo dividere per qualcosa prima di discutere?

La classe: per -1

Si arriva quindi a $ax < -7a + 2$

Prof: arrivati qui vorremmo dividere per a, si può?

Alunni: solo se $a \neq 0$

Prof: questo è quello che abbiamo sempre fatto per le discussioni con le equazioni, ma adesso dobbiamo anche tener conto se $a < 0$ oppure se $a > 0$ perché nel primo grado dovremo invertire il verso della disuguaglianza. Quindi quanti sono i casi?

La classe: sono 3.

$$a < 0$$

$$a = 0$$

$$a > 0$$

Prof: esatto, perché il segno di a, nella divisione, influenza il verso della disequazione.

DISCUSSIONE

$a=0$	$a>0$	$a<0$
$0<2$	$x < \frac{2-7a}{a}$	$x > \frac{2-7a}{a}$
$S=R$	$S = \left] -\infty; \frac{2-7a}{a} \right[$	$S = \left] \frac{2-7a}{a}; +\infty \right[$
	Domanda: da dove si parte?	Posso dividere? SI
	Da $-\infty$	N.B. l'allieva voleva cambiare il segno di a in quanto negativo

Prof: ricapitolando le discussioni delle disequazioni hanno 3 casi invece dei 2 delle equazioni, perché il caso "coefficiente di x diverso da 0" va ulteriormente distinto in < e >.

Un alunno chiede: devo sempre mettere escluso $+\infty$ e $-\infty$?

Prof: certo, perché $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri!!

A questo punto il prof. dà alcuni esercizi per casa e scrive alla lavagna, che divide in due parti:

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO	DISEQUAZIONI FRATTE
Una alunna chiede: perché le mie amiche queste cose le fanno in seconda e noi in prima? Un alunno dice: perché noi siamo più bravi? Prof: Sì $x^2 - 4x + 3 > 0$ Prof: Irene che cos'è quella a sinistra? Irene: una disequazioni di secondo grado Prof: esatto ed è anche scritta in forma canonica, voi non le sapete risolvere, ma sapete scomporre il polinomio, vero? Un'alunna dice: $(x-3)(x-1)$ Prof: quindi abbiamo un prodotto di 2 numeri; quando il prodotto di due numeri è positivo? La classe dice la regola dei segni. Prof: se andiamo a destra della lavagna il ragionamento è lo stesso	$\frac{x-2}{5-x} \leq 0$ Prof: quando un rapporto è positivo? La classe: vale sempre la regola dei segni. Prof: bene, quello che dobbiamo fare è un GRAFICO DI SEGNO, che è fatto così:

Prof: segno dell'espressione $(x-3)(x-1)$

			1			3			
x-3	-	-	0	-	0	+	+	+	
x-1	-	-	0	+	0	+	+	+	
$(x-3)(x-1)$	+	+	0	-	0	+	+	+	

Prof: quindi utilizzando questo grafico sono in grado di dire com'è il prodotto.

Se alla x do esattamente il valore 1 il mio polinomio vale 0, se alla x do il valore 3 il mio polinomio vale 0, quindi 1 e 3 sono zeri del polinomio e questo sul grafico lo evidenzio mettendo 0 in corrispondenza di 1 e di 3.

Ricapitolando: dal grafico del segno capisco che: il polinomio è positivo se do alla x valori più piccoli di 1, nullo in 1, negativo tra 1 e 3, nullo in 3 e positivo dopo 3.

Prof: Quindi, Federico, ricapitolando: quando è positivo il polinomio?

Federico: per $x < 1 \vee x > 3$

Prof: sì, questa è la frase equivalente a quella di partenza; qual è la soluzione?

Caio: $S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$

Prof: e qua cosa ci va?

Ilenia: $\vee$ tra predicati logici diventa $\cup$ tra insiemi.

Prof: benissimo.

Prof: Federico, vieni a risolvere la disequazione fratta? Qui dobbiamo stabilire il segno della frazione, ma come?

Federico: basta guardare il segno del numeratore e del denominatore.

					2					5					
$x-2$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+					
$5-x$	+	+	+	+	0	+	+	0	-	-					
$\frac{x-2}{5-x}$	-	-	-	-	0	+	+	-	-	-					

Prof: cosa succede alla frazione in 2?

La classe: si annulla il numeratore... E anche la frazione!

Prof: cosa succede in 5?

Alunni: SILENZIO

Prof: una frazione con il denominatore che si annulla non ha significato, quindi non esiste! Come si scrive "non esiste"? Non vi ricordate i quantificatori?

Alunni: si scrive così

Adesso allora possiamo scrivere le soluzioni della disequazione fratta $\frac{x-2}{5-x} \leq 0$

Prof: la disequazione è equivalente alla frase...?

Alcuni alunni: $x \leq 2 \vee x > 5$

Prof: E quindi, Federico, mi scrivi le soluzioni?

Federico: $S =]-\infty; 2] \cup]5; +\infty[$

Conclusione del prof: tutte le disequazioni fratte si risolvono con il grafico del segno, quindi se c'è una difficoltà è proprio mettere i segni dei vari fattori di primo grado; regoletta: quando avete trovato gli zeri guardate il coefficiente della x , se è positivo il $+$ è a destra dello zero, se è negativo il $+$ è a sinistra dello zero.

A questo punto vengono assegnati gli esercizi per casa: dal 139 al 143, disequazioni fratte già pronte per il grafico del segno.

Dal libro: 1 Algebra di Anna Trifone e Massimo Bergamin editore Zanichelli.

TERZA LEZIONE

La lezione viene dedicata al ripasso di quanto fatto nelle lezioni precedenti con la risoluzione di esercizi alla lavagna in modo volontario.

Va alla lavagna Ilenia per risolvere un esercizio che era per casa.

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x} \leq 0$$

L'alunna aiutata dai compagni procede alla scomposizione del numeratore per raccoglimento parziale una volta scritto $5x$ come $4x+x$

$$2x^2 + 4x + x + 2 = 2x(x+2) + (x+2) = (2x+1)(x+2)$$

Poi si passa al denominatore, qualcuno dal posto suggerisce di raccogliere la x e così viene fatto:

$$x(6x^3 - 5x^2 - 2x + 1)$$

Prof: trovatemi uno zero del polinomio di 3 grado.

Dopo 10 secondi cominciano a dire che 1 va bene.

Prof: quindi cosa facciamo?

Qualcuno: Ruffini

Viene eseguita la divisione con Ruffini e il polinomio di secondo grado che si ottiene viene scomposto esattamente come si era fatto per il numeratore notando che $x=3x-2x$ e si ottiene:

$$\frac{(x+2)(2x+1)}{x(x-1)(2x+1)(3x-1)}$$

Prof: si può semplificare?

In parecchi rispondono di sì e alcuni ricordano che si può solo se si scrivono le C.E. che in questo caso sono $x \neq -\frac{1}{2}$, **condizione che il prof fa scrivere a sistema con la**

disequazione semplificata. Il prof ribadisce l'importanza della fattorizzazione per stabilire le C.E.

Si procede al disegno del grafico al quale collabora l'intera classe:

		-2		-1/2		0		1/3		1	
$x+2$	-	0	+		+		+		+		+
x	-		-		-	0	+		+		+
$x-1$	-		-		-		-		-	0	+
$3x-1$	-		-		-		-	0	+		+
$f(x)$	+	0	-	+	-	0	+	-	-	0	+

Quando hanno concluso il grafico, il prof ricorda loro che nel sistema c'è una C.E. e mostra loro come "inserirla" da subito nel grafico del segno, per evitare di dover fare l'intersezione alla fine, e ribadisce i concetti di esistenza e di non esistenza.

Prof: scriviamo le soluzioni?

L'alunna scrive la frase equivalente, frasi che il professore collega sempre con il simbolo di equivalenza logica " $\sim$ ":

$$\sim \quad x = -2 \quad \vee \quad -2 < x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \quad \vee \quad \frac{1}{3} < x < 1$$

per poi arrivare con l'aiuto della classe alle soluzioni:

$$S = [-2; -1/2[\cup]-1/2; 0[\cup]1/3; 1[$$

L'esercizio ha richiesto 20 minuti per essere completato e sviscerato.

A questo punto viene svolto un altro esercizio più semplice: $\frac{6x}{x-1} < 1$

Prof: che tipo di disequazione è?

Classe: fratta, ma non in forma canonica

Il prof invita a scriverla in forma canonica e si arriva a: $\frac{5x+1}{x-1} < 0$

Il prof fa notare che, a questo punto, si può procedere con il grafico di segno per la frazione.

Assegna poi per casa il seguente esercizio:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \frac{x}{x-1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{dicendo che ci sarà da lavorare!!}$$

Infatti ci sono 2 grafici di segno da fare e un grafico di intersezione alla fine.

Ultima proposta della lezione da parte del prof, altro volontario alla lavagna e il prof detta:

$$ax - a^2 \geq 3x - 9$$

l'alunno procede ottenendo:

$$\sim \quad (a-3)x \geq (a-3)(a+3)$$

Prof: e adesso?

Classe: si discute!!!

DISCUSSIONE

$a=3$	$a>3$	$a<3$
$0x \geq 0$	$x \geq a+3$	$x \leq a+3$
$S=R$	$S = [a+3; +\infty[$	$S =]-\infty; a+3]$

La classe a questo punto è distrutta e il prof si ferma.