

TRASFORMAZIONI DEL PIANO

Una matrice quadrata 2×2 può essere associata a una trasformazione del piano in sé. Nel caso che il suo determinante sia nullo essa è associata a una trasformazione degenera (tutto il piano va in una retta). Nel caso che il determinante sia negativo una terna destrorsa ABC finisce in una terna sinistrorsa $A'B'C'$.

Per avere un'idea di come si modifica il piano, chiediamoci dove va a finire il cerchio unitario, cioè dove vanno a finire tutti i vettori $(x; y)$ tali che $x^2 + y^2 = 1$.

Limitiamoci alle matrici simmetriche (che in futuro assoceremo a prodotti scalari).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \vartheta + b \sin \vartheta \\ b \cos \vartheta + c \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Al variare dell'anomalia del vettore unitario, che figura descrivono le immagini?

Se $\det A \neq 0$ il cerchio unitario diventa una ellisse.

Se $\det A = 0$ il cerchio unitario diventa un segmento.

Tutto ciò è abbastanza chiaro se si pensa agli autovalori e al polinomio caratteristico della matrice A .

Se ci sono due autovalori positivi corrispondenti a due direzioni particolari (quelle degli autovettori che hanno quegli autovalori) i vettori del cerchio unitario che hanno quelle due direzioni verranno moltiplicati per i rispettivi autovalori, i vettori intermedi verranno moltiplicati per un valore intermedio e subiranno una (leggera) deviazione. La circonferenza diventa una ellisse percorsa nello stesso verso.

Se c'è un autovalore nullo ci sarà una direzione di vettori mandati nel vettore nullo, tutto il piano finisce in una retta.

Se c'è un autovalore positivo e un autovalore negativo ci sarà una direzione che corrisponde a una inversione e l'ellisse verrà "percorsa" in senso inverso.

ESEMPIO 1

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A > 0$$

Cerchiamo gli autovalori di A , ossia i valori per cui $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ossia

$$\begin{pmatrix} 9-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \text{ con soluzioni non banali [si tratta di cercare il } \ker(A - \lambda I)]$$

$$(9-\lambda)(3-\lambda) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 11$$

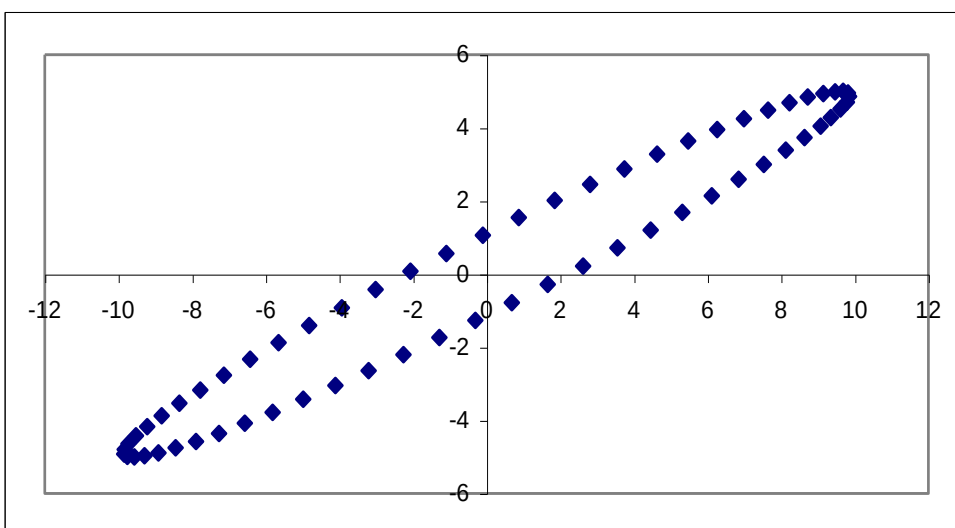
Gli autovalori sono dunque 1 e 11. Cerchiamo gli autovettori.

$$\text{Se } \lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 9-1 & 4 \\ 4 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia } 8x + 4y = 0 \quad y = -2x$$

$$\text{Se } \lambda = 11 \quad \begin{pmatrix} 9-11 & 4 \\ 4 & 3-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia } -2x + 4y = 0 \quad y = \frac{1}{2}x$$

Gli autovettori relativi ai due diversi autovalori sono tra loro perpendicolari.

Il cerchio unitario viene trasformato in una ellisse i cui assi coincidono con le rette suddette. Il vettore unitario $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ viene mandato nel vettore $\begin{pmatrix} 13/\sqrt{2} \\ 7/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ che non ha la stessa direzione e ha modulo $\sqrt{109}$, compreso tra 1 e 11.



ESEMPIO 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \det A = 0$$

Cerchiamo gli autovalori di A , ossia i valori per cui $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ossia le soluzioni non banali di $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ [si tratta di cercare il $\ker(A - \lambda I)$]

$$(2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 0 \quad \lambda^2 - 10\lambda = 0 \quad \lambda = 0 \vee \lambda = 10$$

Cerchiamo gli autovettori relativi

$$\text{Se } \lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} 2-0 & 4 \\ 4 & 8-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia}$$

$$2x + 4y = 0 \quad y = -\frac{1}{2}x$$

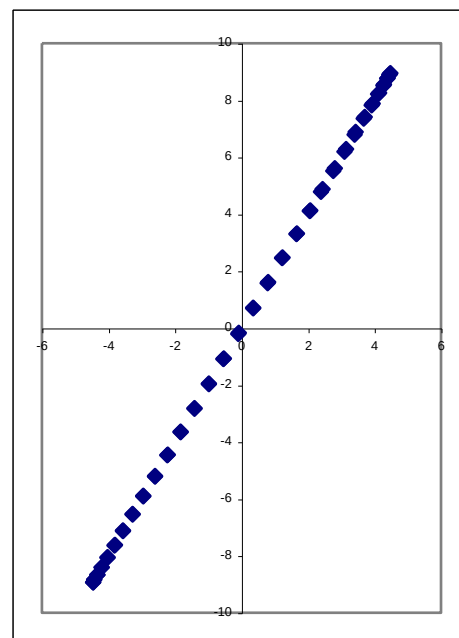
$$\text{Se } \lambda = 10 \quad \begin{pmatrix} 2-10 & 4 \\ 4 & 8-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia}$$

$$-8x + 4y = 0 \quad y = 2x$$

Gli autovettori relativi a diversi autovalori sono tra loro perpendicolari.

Il cerchio unitario viene trasformato in un segmento parallelo al vettore $(1;2)$ ossia alla retta $y = 2x$ [l'intero piano verrebbe trasformato nella retta tutta].

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \vartheta + 4 \sin \vartheta \\ 4 \cos \vartheta + 8 \sin \vartheta \end{pmatrix} = (2 \cos \vartheta + 4 \sin \vartheta) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ESEMPIO 3

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A < 0 \quad \text{Cerchiamo gli autovalori di } A, \quad \det \begin{pmatrix} 11-\lambda & 6 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(11-\lambda)(1-\lambda) - 36 = 0 \quad \lambda^2 - 12\lambda - 25 = 0 \quad \lambda = 6 \pm \sqrt{61}$$

Cerchiamo gli autovettori relativi

$$\text{Se } \lambda = 6 - \sqrt{61} \quad \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{61} & 6 \\ 6 & -5 + \sqrt{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia } (5 + \sqrt{61})x + 6y = 0$$

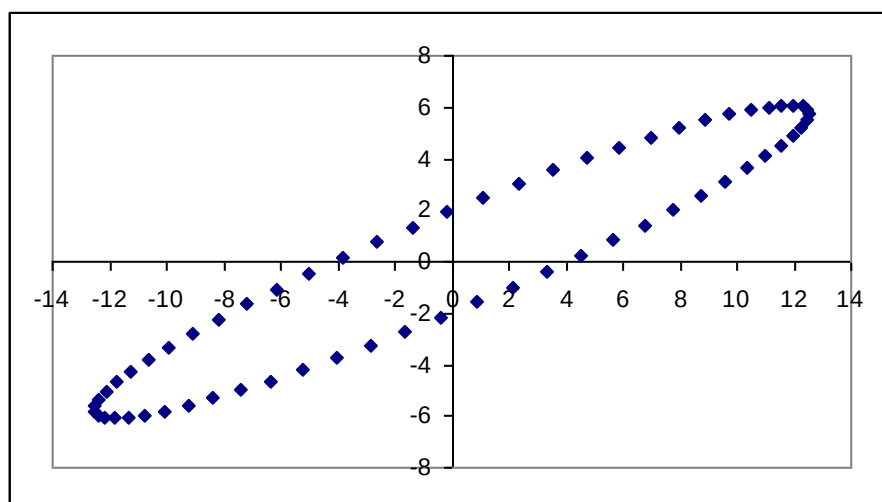
gli autovettori sono quelli della retta $y = -\frac{5 + \sqrt{61}}{6}x$.

$$\text{Se } \lambda = 6 + \sqrt{61} \quad \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{61} & 6 \\ 6 & -5 - \sqrt{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia } (5 - \sqrt{61})x + 6y = 0$$

gli autovettori sono quelli della retta $y = \frac{\sqrt{61} - 5}{6}x$.

Gli autovettori relativi ai due diversi autovalori sono ancora una volta tra loro perpendicolari. È sempre così?

Il cerchio unitario viene trasformato in una ellisse (con centro di simmetria nell'origine) i cui assi coincidono con le due rette di autovettori



Ora però c'è un autovalore positivo e un autovalore negativo. Variando con continuità in direzione antioraria la direzione del vettore unitario centrato nell'origine, **l'ellisse viene percorsa in senso antiorario.**

MATRICI SIMMETRICHE E PRODOTTI SCALARI

Il motivo per cui ci siamo limitati alle matrici simmetriche è che esse sono associabili a prodotti scalari.

Inoltre, dalla teoria, sappiamo che le matrici simmetriche, sono sempre diagonalizzabili: esiste cioè una base ortogonale (e ortonormale, una volta che si sia definita una norma) rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo è diagonale con gli autovalori sulla diagonale principale. Questo significa che esiste una base di vettori che trasforma la circonferenza unitaria in una ellisse con gli assi paralleli ai vettori della base ortonormale o in un segmento giacente su uno dei due assi.

Come si attribuisce una norma ai vettori? Attraverso un prodotto scalare definito positivo.

Alle matrici simmetriche è associabile un prodotto scalare, per la precisione, definiamo “prodotto scalare definito dalla matrice A ” il valore

$$\langle u | A | v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2$$

Il prodotto scalare è una particolare forma bilineare. Nel caso che il prodotto scalare sia definito positivo – ovvero che $\langle v | A | v \rangle \neq 0 \quad \forall v \neq 0$ – si può definire “norma del vettore v secondo il prodotto scalare definito dalla matrice A ” il valore $\|v\|_A$ tale che

$$\|v\|_A^2 = \langle v | A | v \rangle = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Lo spazio vettoriale dotato di tale norma definita tramite un prodotto scalare definito positivo è uno spazio vettoriale euclideo.

E quando, guardando A , possiamo capire che il prodotto scalare è definito positivo? Quando il determinante di A è maggiore di zero. In tal caso il discriminante del polinomio omogeneo $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ($=4(b^2 - ac)$, opposto del determinante della matrice) è negativo e il valore del prodotto scalare è sempre positivo.

Ma se il determinante di A fosse uguale o minore di 0, come potremmo interpretare tale “prodotto scalare”? Non potremmo più definire una norma ma potremmo ugualmente parlare di vettori “ortogonali” a se stessi. Quali sono?

VETTORI ORTOGONALI A SE STESSI

Se $\det A > 0$ non ci sono vettori ortogonali a se stessi. Possiamo chiederci quali sono i vettori che hanno norma 1 (o 2, o 3...). Sono tutti quelli che soddisfano le equazioni

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \dots ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2^2 \dots ax^2 + 2bxy + cy^2 = 3^2$$

Sono cioè i vettori che hanno la punta nei punti dell'ellisse.

Torniamo all'esempio fornito dalla nostra matrice dell' **ESEMPIO 1**

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare è definito come $(x \ y) \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9x^2 + 8xy + 3y^2$

Cercare i vettori di norma 1 ossia il “cerchio unitario per la norma data” equivale a cercare i vettori tali che $\langle v | A | v \rangle = 1$, ossia i punti del piano che soddisfano la conica di equazione $9x^2 + 8xy + 3y^2 = 1$.

Sappiamo da nozioni di geometria proiettiva che tale conica è una ellisse e sappiamo che possiamo scrivere la sua equazione canonica riferendola agli assi corrispondenti agli autovettori della matrice. Sappiamo già che gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 11$ e che i relativi autovettori hanno rispettivamente le direzioni delle rette $y = -2x$ e $y = \frac{1}{2}x$

Se scegliamo tali rette come sistema di riferimento, otterremo l'equazione canonica dell'ellisse.

Le formule di trasformazione (una rotazione di $\arctg(1/2)$) sono:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mentre quelle inverse sono } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Sostituiamo nell'equazione dell'ellisse $9x^2 + 8xy + 3y^2 = 1$ e otteniamo

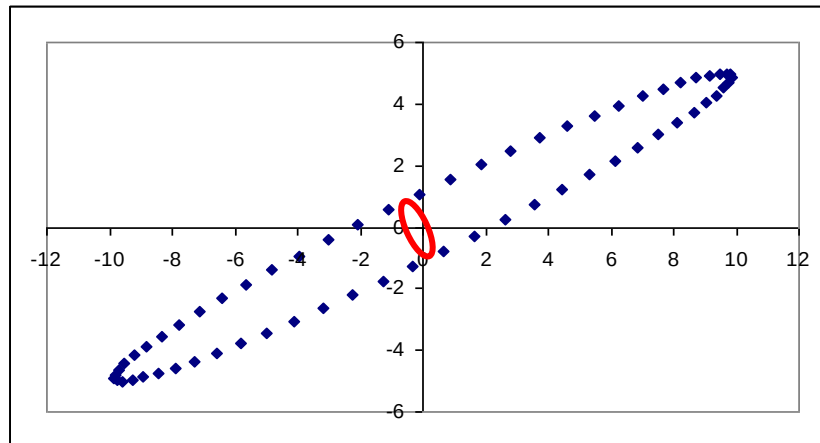
$$9\left(\frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{5}}Y\right)^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{5}}Y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y\right)^2 = 1$$

$$9\left(\frac{4}{5}X^2 - \frac{4}{5}XY + \frac{1}{5}Y^2\right) + 8\left(\frac{2}{5}X^2 + \frac{3}{5}XY - \frac{2}{5}Y^2\right) + 3\left(\frac{1}{5}X^2 + \frac{4}{5}XY + \frac{4}{5}Y^2\right) = 1$$

$$11X^2 + Y^2 = 1$$

È l'ellisse rossa della figura i cui assi coincidono con quella dell'esempio 1 e che

nella direzione dell'autovalore 11 risulta contratta del fattore $\frac{1}{\sqrt{11}}$



Se $\det A = 0$ significa che $ax^2 + 2bxy + cy^2$ è un quadrato perfetto; sia esso $(rx + sy)^2$

ovvero sono ortogonali a se stessi i vettori della retta

$y = -\frac{r}{s}x$. Torniamo alla matrice del nostro **ESEMPIO 2**

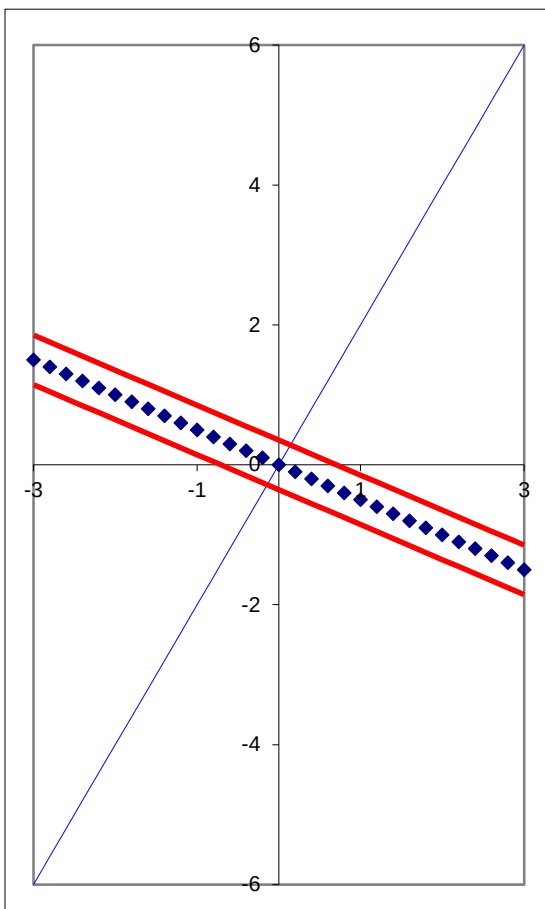
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare è definito come

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 8xy + 8y^2 = 2(x + 2y)^2.$$

Sono ortogonali a se stessi i vettori della retta $y = -\frac{1}{2}x$,
cioè quelli individuati dall'autovalore 0.

Cercare i vettori di norma 1 ossia il “cerchio unitario per la norma data” equivale a cercare i vettori tali che $\langle v | A | v \rangle = 1$, ossia i vettori che hanno i vertici nei punti del piano che soddisfano la conica di equazione $2x^2 + 8xy + 8y^2 = 1$ ossia $2(x + 2y)^2 = 1$ che consta delle due



rette di equazione $x + 2y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, segnate in rosso nella figura precedente.

A parte i vettori che hanno i vertici nei puntini blu (che hanno norma 0 e/o sono ortogonali a se stessi), che norma ha, ad esempio, il vettore (1;2) segnato in nero? $5\sqrt{2}$ (contro il $\sqrt{5}$ della norma usuale) ovvero tale norma risulta moltiplicata di $\sqrt{10}$ nella direzione dell'autovalore 10

Se $\det A < 0$ significa che il discriminante del polinomio è positivo, ossia che $ax^2 + 2bxy + cy^2$ si può scomporre in due fattori e che vale 0 secondo due rette $ax^2 + 2bxy + cy^2 = (rx + sy)(tx + wy) = 0$ cioè $(rx + sy = 0) \vee (tx + wy = 0)$ ovvero sono ortogonali a se stessi i vettori delle due rette $y = -\frac{r}{s}x \vee y = -\frac{t}{w}x$

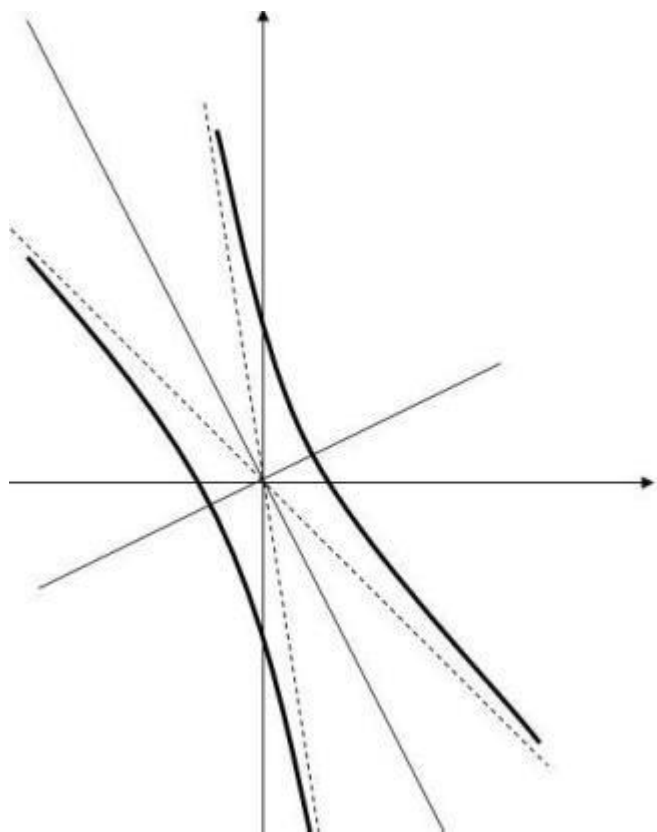
Torniamo al nostro **ESEMPIO 3**

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A < 0$$

Sono ortogonali a se stessi (o hanno norma 0) i vettori che soddisfano l'equazione $11x^2 + 12xy + y^2 = 0$ ossia i vettori che hanno le punte nei punti delle rette $(y = -x) \vee (y = -11x)$

A che cosa corrispondono tali rette? (tratteggiate in figura sotto)

Quali sono i vettori che hanno norma 1? Quelli che soddisfano l'equazione



$11x^2 + 12xy + y^2 = 1$, che è l'equazione di una iperbole i cui assi corrispondono alle direzioni degli autovettori.

Sappiamo già che gli autovalori di A sono $\lambda = 6 \pm \sqrt{61}$ e che gli autovettori relativi sono, per $\lambda = 6 - \sqrt{61}$, quelli della retta $y = -\frac{5 + \sqrt{61}}{6}x$, e per $\lambda = 6 + \sqrt{61}$ quelli della retta $y = \frac{\sqrt{61} - 5}{6}x$, rette che risultano essere le

bisettrici delle due rette $(y = -x) \vee (y = -11x)$ asintoti dell'iperbole.

Nella figura sotto i vettori che danno prodotto scalare negativo...

