

COME CERCARE I PUNTI UNITI E LE RETTE UNITE DI UNA TRASFORMAZIONE

Sia data la seguente affinità: $\begin{cases} x' = 2x - y + 4 \\ y' = x + 4y \end{cases}$. È chiaramente un'affinità non degenera diretta (il determinante della matrice è positivo), non similitudine.

Punti uniti

I punti uniti si cercano risolvendo il sistema $\begin{cases} x = 2x - y + 4 \\ y = x + 4y \end{cases} \approx \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$

L'unico punto unito è dunque $(-3;1)$

Rette unite

Una retta r di equazione $ax+by+c=0$, soddisfatta da $P(x;y)$, è unita se è soddisfatta anche dal trasformato di P , ossia da $P'(x';y')$ ossia se è anche $ax'+by'+c=0$. Usando le equazioni della trasformazione, questo comporta che $P(x;y)$ debba soddisfare anche l'equazione

$$a(2x-y+4)+b(x+4y)+c=0 \quad \text{ossia} \quad (2a+b)x + (4b-a)y + (4a+c)=0$$

la quale coincide con la retta r di partenza se i coefficienti delle due rette sono tra loro proporzionali, $\frac{2a+b}{a} = \frac{4b-a}{b} = \frac{4a+c}{c}$, sistema che può essere studiato in vari modi. Un modo

interessante di risolverlo è scriverlo nel seguente modo: $\begin{cases} 2a + b = ka \\ 4b - a = kb \\ 4a + c = kc \end{cases}$, ovvero, in forma

canonica, $\begin{cases} (2-k)a + b = 0 \\ -a + (4-k)b = 0 \\ 4a + (1-k)c = 0 \end{cases}$, sistema parametrico omogeneo in tre incognite (a, b, c) la cui

matrice è $\begin{pmatrix} 2-k & 1 & 0 \\ -1 & 4-k & 0 \\ 4 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$. Se il determinante di questa matrice fosse diverso da 0

l'unica soluzione (per il teorema di Cramer) sarebbe la soluzione banale dei sistemi omogenei (quella NULLA: $a=0, b=0, c=0$), che però non corrisponde a nessuna retta; quindi, perché il sistema sia indeterminato, cioè abbia altre soluzioni oltre a quella banale, occorre che il determinante della matrice sia 0.

$\det A = (1-k)(k^2 - 6k + 9)$ ed è chiaramente $\det A = 0$ se $k=1$ oppure se $k=3$

- $k=1$ corrisponde alla soluzione $(0;0;c)$ ovvero $a=0, b=0$, che non corrisponde a nessuna retta;
- $k=3$ corrisponde alla soluzione $(c/2; c/2; c)$ che corrisponde alla retta $x+y+2=0$

la quale pertanto è l'unica retta unita della trasformazione.