

SIMULAZIONE ZANICHELLI 2020

DELLA PROVA DI MATEMATICA E FISICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti.**Problema 1**

A cura di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Lorenzo Meneghini.

Si consideri la famiglia di funzioni reali di variabile reale $f_k(x) = \frac{1}{x^2+k}$, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$.

1. Verificare che, al variare di $k \in \mathbb{R}^+$, la funzione f_k ammette due punti di flesso che appartengono alla curva di equazione $y = \frac{1}{4x^2}$. Verificare, inoltre, che il grafico Γ_k della funzione f_k è tangente alla circonferenza α_k di equazione $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} = 0$ e studiare il numero di intersezioni tra le due curve al variare di $k \in \mathbb{R}^+$.
2. Dopo aver studiato la funzione $f_1(x)$, tracciarne il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Determinare per quale valore di b l'area sottesa al grafico della funzione $f_1(x)$ nell'intervallo $[0; b]$ è uguale a quella del cerchio α_1 di equazione $x^2 + y^2 - y \leq 0$.

Un conduttore sferico, di raggio $r = 1,00$ cm, viene caricato con una carica positiva Q . Il centro della sfera si trova nel punto $A(0; 1,00)$ di un riferimento cartesiano ortogonale, in cui le distanze sono misurate in metri.

3. Determinare la densità superficiale della distribuzione di carica, se il campo elettrico misurato nel punto $B(1,73; 0)$ vale $E = 2,00 \cdot 10^4$ V/m.

Verificare che il potenziale elettrico generato da Q in un punto $C(x; 0)$ dell'asse delle ascisse può essere espresso dalla funzione

$$V(x) = h \cdot \sqrt{f_1(x)},$$

dove h è una costante positiva e $f_1(x)$ è una funzione della famiglia f_k , con $k = 1,00$ m². Determinare le unità di misura di h .

Tracciare l'andamento probabile della funzione $V(x)$, basandosi sul grafico di $f_1(x)$.

4. Un carrellino metallico di massa $m = 50$ g, inizialmente scarico e di dimensioni trascurabili, viene posizionato in B su una guida metallica, sovrapposta all'asse x . Il carrellino, inizialmente fermo, è vincolato a scivolare sulla guida, con attrito trascurabile. In un certo istante sul carrellino viene depositata una carica $q = 1,00 \cdot 10^{-6}$ C. Determinare la velocità raggiunta dal carrellino quando passa per il punto $D(3,87; 0)$.

È vero che se si raddoppia la massa del carrellino, allora dimezza la sua velocità in D ?

Problema 2

A cura di Gianni Melegari, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

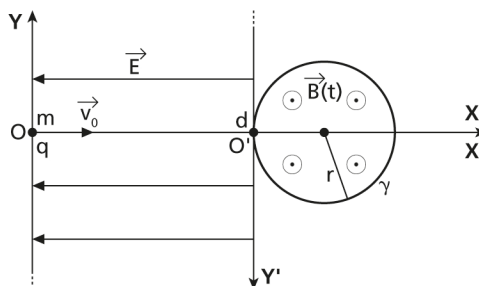
In un piano orizzontale OXY è definito, sulla striscia $0 \leq X \leq d$ (con $d = 3,000 \cdot 10^{-1}$ m), il campo elettrostatico costante $\vec{E}$ orientato in senso opposto all'asse OX . È presente inoltre un solenoide disposto perpendicolarmente a tale piano, la cui sezione su OXY è la circonferenza γ . Il solenoide ha raggio $r = 4,000$ cm ed è costituito da $N = 100$ spire contigue di rame di resistività $\rho = 1,680 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Al suo interno è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}(t)$, il cui modulo è dato da

$$B(t) = a \left(\frac{bt^2 + 1}{ct^2 + 1} \right),$$

con $a = 5,000 \cdot 10^{-2}$ T, $b = 1,000 \cdot 10^5 \text{ s}^{-2}$ e $c = 9,895 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}$.

All'istante $t = 0$ s una particella di massa $m = 2,500 \cdot 10^{-24}$ kg e di carica $q = 3,204 \cdot 10^{-19}$ C, vincolata a muoversi nel piano OXY , si trova in O e ha una velocità iniziale $v_0 = 5,000 \cdot 10^2$ m/s orientata secondo l'asse OX . La particella entra nel solenoide all'istante t_i ed è soggetta a un campo magnetico la cui intensità ha raggiunto il 99,00% del suo estremo superiore.

1. Utilizzando il secondo principio della dinamica, determinare il modulo del campo elettrico e la velocità di entrata $v(t_i)$ della particella all'interno del solenoide. Stabilire le coordinate del punto di uscita della particella dal solenoide rispetto al sistema di riferimento $O'X'Y'$ della figura.



2. Verificare che la corrente indotta $i(t)$ nel solenoide ha il seguente modulo

$$|i(t)| = \frac{\pi r l^2}{4 \rho N^2} a(b - c) \frac{t}{(ct^2 + 1)^2}$$

e determinare il suo verso. Inoltre, trovare il modulo e il verso del campo magnetico indotto $B_{ind}(t)$ nel solenoide. Trascurare gli effetti di autoinduzione.

Introdurre poi la seguente variabile adimensionale

$$x = t\sqrt{c}$$

e definire la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|i(x)|}{I},$$

dove

$$I = \frac{\pi r l^2}{8 \rho N^2} \cdot \frac{a(b - c)}{\sqrt{c}}.$$

3. Dopo aver verificato che risulta $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, studiare la funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$h(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

individuando, in particolare, eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso. Tracciare il grafico della funzione h rappresentando anche le due rette tangenti p e q nel suo punto di non derivabilità.

4. Definire la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in modo che $g(x) = x^4 f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verificare che la funzione $|g|$ ha come asintoti obliqui le rette p e q . Infine, mostrare la validità delle seguenti identità

$$\int_{-m}^m [2x - g(x)] dx = 0,$$

$$\int_{-m}^m [2|x| - |g(x)|] dx = 4 \ln(m^2 + 1) - \frac{2m^2}{m^2 + 1},$$

per ogni numero reale m non negativo.

QUESITI

I quesiti 1, 2, 3 e 5 sono a cura di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Lorenzo Meneghini; il quesito 4 è a cura di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Andrea Betti; i quesiti 6, 7 e 8 sono a cura di Gianni Melegari, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x}.$$

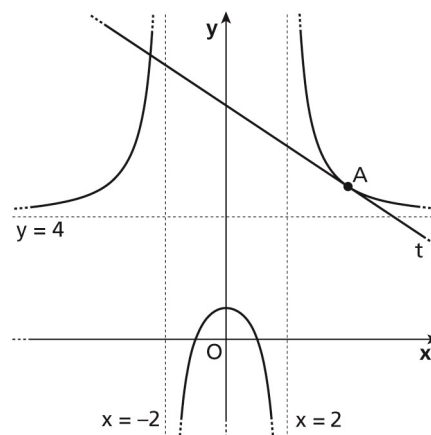
Calcola, se esistono, i limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, giustificando le risposte.

2. La funzione $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+k}$, in cui $p(x)$ è un polinomio e $k \in \mathbb{R}$, ha il grafico in figura, che è simmetrico rispetto all'asse y .

La retta t è tangente al grafico di $f(x)$ nel punto A di ascissa 4 e ha coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$.

Determinare il grado di $p(x)$ e l'espressione della funzione basandosi sulle informazioni che si possono dedurre dal grafico.

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo della funzione $g(x) = xf(x)$.



3. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$. Indicato con M il suo punto di massimo assoluto, determinare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione e passanti per M .

4. Sono date le funzioni

$$f(x) = \frac{65x^2}{16(x^3 + 1)}, \quad g(x) = \frac{1}{16}x^2.$$

Detti A e B i punti comuni ai grafici delle due funzioni, determinare l'area della regione R di piano delimitata dagli archi dei due grafici compresi tra A e B . Verificare che i punti A e B appartengono anche al grafico della funzione

$$h(x) = ax^3 + \left(\frac{1}{16} - 4a\right)x^2$$

per qualunque $a > 0$, quindi determinare il valore di $a > 0$ per il quale la regione R' delimitata dagli archi AB dei grafici di $g(x)$ e di $h(x)$ sia equivalente a R .

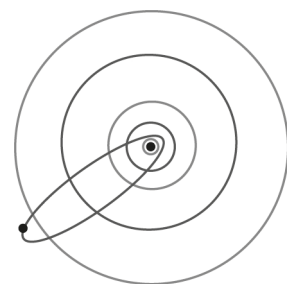
5. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} + bx + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determinare il valore dei parametri reali a e b tali che la funzione risulti derivabile in $\mathbb{R}$. Tracciare il grafico della funzione deducendolo da quello di funzioni elementari.

Verificare che $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1; 6]$, determinando l'ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

6. La cometa di Halley orbita intorno al Sole con un periodo di circa 76,0 anni, descrivendo un'orbita ellittica molto eccentrica ($e = 0,967$); per questo motivo l'afelio (punto più lontano dal Sole) differisce molto dal perielio (punto più vicino al Sole). I valori orbitali della cometa all'afelio sono $v_{af} = 914$ m/s e $r_{af} = 35,1$ UA. Tenendo conto del principio di conservazione del momento angolare $\vec{L}$, il cui modulo è definito dalla relazione $L = mvr$ nei punti considerati:



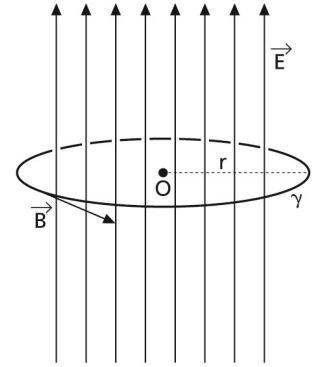
- verificare che le relazioni che indicano v_{pe} e r_{pe} (grandezze orbitali della cometa al perielio) sono le seguenti

$$v_{pe} = \frac{\sqrt{G^2 M_{\odot}^2 + 2E_s L_s^2 + G M_{\odot}}}{L_s}, \quad r_{pe} = \frac{L_s^2}{\sqrt{G^2 M_{\odot}^2 + 2E_s L_s^2 + G M_{\odot}}},$$

dove E_s e L_s sono, rispettivamente, l'energia e il modulo del momento angolare per unità di massa, G è la costante di gravitazione universale e $M_{\odot}$ è la massa del Sole;

- calcolare i valori numerici di v_{pe} e r_{pe} .

7. Un campo elettrico $\vec{E}$, uniforme e variabile nel tempo, genera un campo magnetico indotto $\vec{B}$. Si consideri una circonferenza γ di raggio r e di centro O perpendicolare al campo $\vec{E}$; si sa che il campo $\vec{B}$ è tangente a γ , nel piano che la contiene; inoltre, in tutti i punti di γ il suo modulo è dato dalla relazione $B(t) = \mu_0 \varepsilon_0 r a \frac{t^2}{bt^2 + 1}$, con $a = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{T m}}{\text{s}^4}$ e $b = 2 \text{ s}^{-2}$.



- Determinare il modulo del campo elettrico $\vec{E}$, supponendo che all'istante $t = 0 \text{ s}$ sia nullo.
- Verificare che esso non dipende da r .

8. Un osservatore B , solidale con un sistema di riferimento S' , si muove con velocità v_1 rispetto a un altro osservatore A , che si trova in un sistema di riferimento inerziale S . Al tempo $t = t' = 0 \text{ s}$, entrambi occupano la posizione $x = x' = 0 \text{ m}$ e la velocità relativa è rivolta nei semiasse positivi delle ascisse di entrambi i sistemi.

Si considerano due eventi:

- E_1 , in cui l'orologio di A indica l'istante $t_1 = 2,1 \cdot 10^2 \text{ s}$ e la sua coordinata spaziale in S' è $x'_1 = -8,5 \cdot 10^{10} \text{ m}$;
- E_2 , in cui l'orologio di B indica l'istante t'_2 e la sua coordinata spaziale in S è $x_2 = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

Calcolare:

- il rapporto $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$;
- l'istante t'_2 .

In un secondo caso abbiamo l'evento F_1 , in cui la coordinata spaziale in S' dell'orologio di A è ancora x'_1 , e l'evento F_2 , in cui la coordinata spaziale dell'orologio di B in S è ancora x_2 .

- Determinare, se esiste, un valore $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$ della velocità di S' rispetto a S per il quale i due eventi F_1 e F_2 sono simultanei in S .

Costanti fisiche	
Costante dielettrica del vuoto	$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Velocità della luce nel vuoto	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Unità astronomica	$1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$
Massa del Sole	$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Costante di gravitazione universale	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$