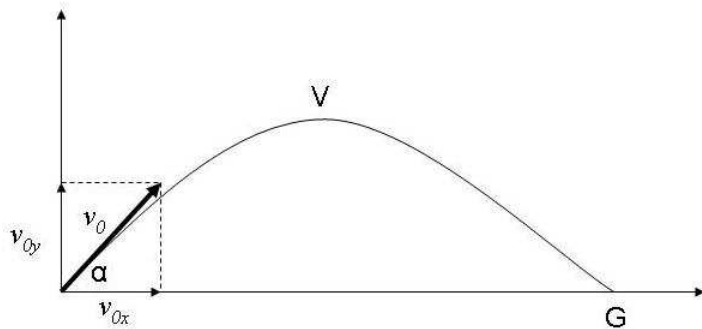


## Parabola di sicurezza

Un proiettile viene sparato dall'origine  $O(0;0)$  di un sistema di assi cartesiani con velocità iniziale  $\vec{v}_0 = (v_{0x}; v_{0y})$  e alzo  $\alpha$ .



Le **equazioni parametriche del moto** sono

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{da cui, eliminando } t,$$

ricaviamo l'**equazione cartesiana della**

**traiettoria:** 
$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2.$$

Si tratta di una parabola rivolta verso il basso, con

vertice  $V = \left( \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}; \frac{v_{0y}^2}{2g} \right)$ , che interseca l'asse delle ascisse in  $O$  e in  $G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$ . Quest'ultimo valore è

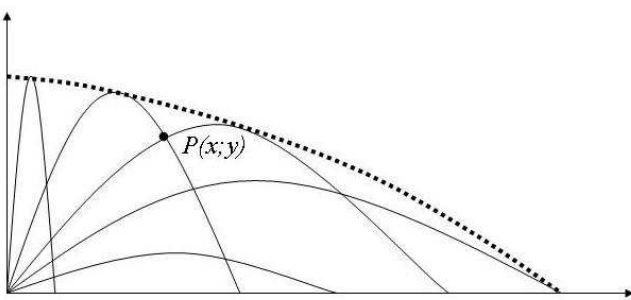
chiamato "gittata". Se l'alzo fosse di  $90^\circ$  la quota  $h$  raggiunta dal proiettile sarebbe  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ .

Detta  $m$  l'inclinazione dello sparo, è  $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$  da cui ricaviamo  $v_{0y} = mv_{0x}$  e

$$v_0 = |\vec{v}_0| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + m^2v_{0x}^2} = v_{0x}\sqrt{1+m^2}$$

Utilizzando  $m$  come incognita, l'equazione cartesiana della traiettoria può allora essere scritta come

$$y = mx - \frac{g}{2} \cdot \frac{1+m^2}{v_0^2} x^2$$



Al variare di  $m$  si ottiene la traiettoria descritta dal proiettile. Un punto  $P = (\bar{x}; \bar{y})$  potrà essere raggiunto dal proiettile se e solo se le sue

coordinate soddisfano l'equazione della traiettoria per qualche  $m$ . Sostituendo le coordinate di

$P = (\bar{x}; \bar{y})$  nell'equazione della traiettoria si ottiene l'equazione  $\bar{y} = m\bar{x} - \frac{g}{2} \frac{1+m^2}{v_0^2} \bar{x}^2$  che è una

equazione di secondo grado nella variabile  $m$ .

In forma canonica essa diventa:  $\frac{g}{2} \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} m^2 - \bar{x} \cdot m + \bar{y} + \frac{g}{2} \frac{1}{v_0^2} \bar{x}^2 = 0.$

Essa ha soluzioni se  $\Delta \geq 0$  ossia se  $\bar{x}^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \left( \bar{y} + \frac{g}{2} \frac{1}{v_0^2} \bar{x}^2 \right) \geq 0$  ossia se

$$\frac{2g\bar{x}^2}{v_0^2} \left( \bar{y} + \frac{g}{2} \frac{1}{v_0^2} \bar{x}^2 \right) \leq \bar{x}^2 \quad \text{ossia se} \quad \bar{y} + \frac{g}{2} \frac{1}{v_0^2} \bar{x}^2 \leq \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{ossia se} \quad \bar{y} \leq -\frac{g}{2v_0^2} \bar{x}^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Sono raggiungibili tutti i punti  $P = (\bar{x}; \bar{y})$  che stanno “sotto” la parabola di equazione

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Non sono raggiungibili quelli che stanno “al di sopra” di tale parabola, che

pertanto è detta **parabola di sicurezza** (curva tratteggiata nel grafico a pagina precedente).

Se  $\Delta > 0$  il punto sta “sotto” la parabola di sicurezza ed esistono due inclinazioni distinte utili per colpirlo. Se  $\Delta = 0$  il punto sta su tale parabola e vi è una sola inclinazione possibile per colpirlo.

L'ascissa del punto in cui la parabola di sicurezza interseca il semiasse positivo delle  $x$  corrisponde alla

**massima gittata**. Tale valore è  $G_{MAX} = \frac{v_0^2}{g}$ .

**Dimostriamo che si ottiene tale gittata massima per  $\alpha = 45^\circ$ .**

Sempre utilizzando  $m$ , il valore della gittata è  $G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2mv_{0x}^2}{g} = \frac{2m \frac{v_0^2}{1+m^2}}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{m}{1+m^2}$  e

depende da  $m$ . Essa è massima quando è massimo il valore della frazione  $\frac{m}{1+m^2}$ .

**Dimostrazione per una classe II**

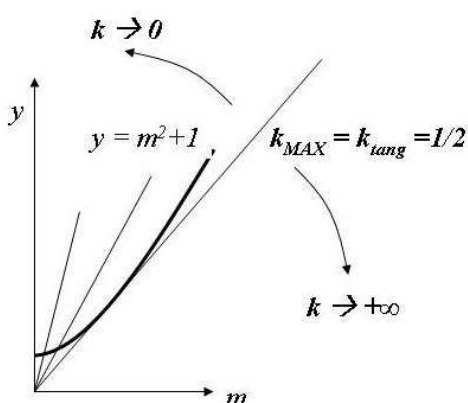
$$\frac{m}{1+m^2} = k \quad km^2 - m + k = 0 \quad \text{ha soluzioni se } \Delta \geq 0 \quad \text{ossia se } 1 - 4k^2 \geq 0$$

Dunque  $k_{MAX} = \frac{1}{2}$  corrispondente a  $m = 1$ .

**Dimostrazione per una classe III**

Detto  $k$  il valore di tale frazione, cercare quando  $k$  è massimo comporta risolvere il sistema misto

$$\begin{cases} \frac{m}{1+m^2} = k \\ m > 0 \end{cases} \quad \text{ovvero il sistema} \quad \begin{cases} y = 1+m^2 \\ y = \frac{1}{k}m \\ m > 0 \end{cases} \quad \text{in due variabili } m \text{ (ascissa) e } y \text{ (ordinata) e parametro } k.$$



Il fascio proprio ha centro  $O(0;0)$  e coefficiente angolare  $1/k$

La parabola ha vertice  $(0;1)$  ed è rivolta verso l'alto. La retta del fascio che risulta tangente alla (semi)parabola ha  $k=1/2$

(dimostrarlo), il quale pertanto è il massimo valore raggiungibile da  $k$ , che corrisponde a  $m = 1$   
(dimostrare anche questo).

Se  $m=1$  allora è  $\alpha = 45^\circ$ .

**Dimostrazione per una classe V**