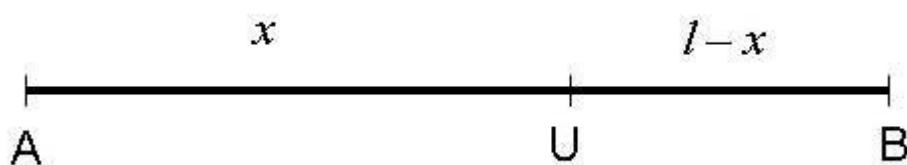


NUMERI AUREI

PARTE AUREA DI UN SEGMENTO

Si definisce **parte aurea** AU (e come meglio chiamarla?) del segmento AB il segmento AU medio proporzionale tra l'intero AB e la parte rimanente. $AB : AU = AU : UB$



Sia $\overline{AB} = l$ e $\overline{AU} = x$ L'equazione risolvente è $x^2 = 1 - x$

Si trova che è $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803398...$ Tale numero è indicato con la lettera greca γ .

La sua proprietà è di soddisfare l'uguaglianza $\gamma^2 = 1 - \gamma \Rightarrow \gamma + 1 = \frac{1}{\gamma}$ Da cui si deduce che $\frac{1}{\gamma} = \gamma + 1 = 1,61803398...$ Tale numero è indicato con Φ in onore di Fidia.

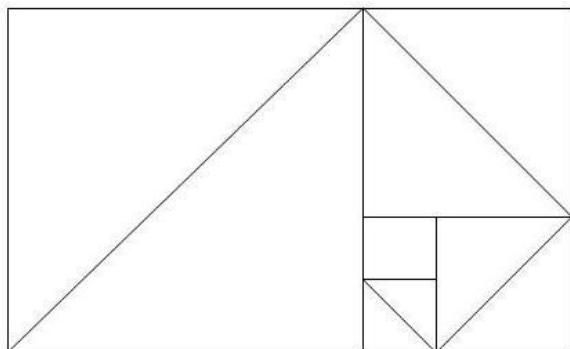
$$\Phi = \frac{1}{\gamma} + 1 = 1,61803398...$$

Ricapitoliamo: $\Phi = \frac{1}{\gamma} = \gamma + 1 = 1,61803398... = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

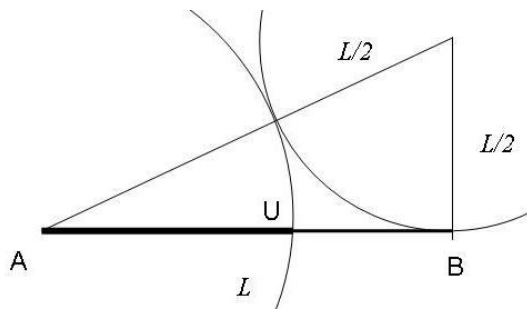
Se ne deduce che le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ sono γ e Φ .

IL RETTANGOLO AUREO

Un **rettangolo** si definisce **aureo** se la sua altezza è la parte aurea della base. Si dimostri (esercizio) che aggiungendo (o togliendo) un quadrato a un rettangolo aureo, [quello costruito sul lato più lungo (corto)] si ottiene ancora un rettangolo aureo.



COSTRUZIONE GEOMETRICA DELLA PARTE AUREA



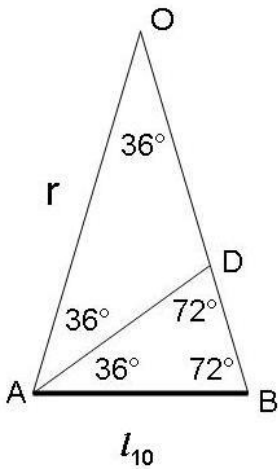
$$AU = \frac{\sqrt{5}-1}{2} L = \gamma \cdot L$$

IL LATO DEL DECAGONO INSCRITTO

Il lato del decagono regolare inscritto è la parte aurea del raggio

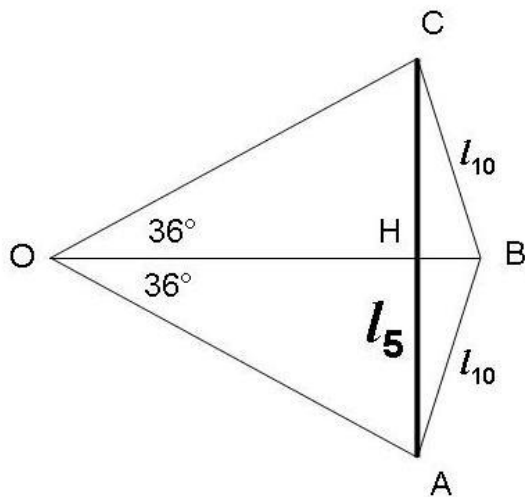
$$l_{10} = \gamma \cdot r$$

Si tracci la bisettrice dell'angolo in A, si ottengono due triangoli isosceli simili; si scriva la proporzione e si ricavi il teorema (Si osservi che $AB=AD=DO$).



IL LATO DEL PENTAGONO INSCRITTO

Il pentagono inscritto si ottiene congiungendo un vertice sì e uno no del decagono.



Calcoliamo l_5 col teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72^\circ$$

Quanto vale il $\cos(72^\circ)$? Osservando prima CHO e poi CHB troviamo che è

$$\overline{HC} = r \sin 36^\circ = l_{10} \sin 72^\circ$$

da cui

$$\begin{aligned} r \sin 36^\circ &= \gamma \cdot r \sin 72^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin 36^\circ &= 2\gamma \sin 36^\circ \cos 36^\circ \end{aligned}$$

da cui $\cos 36^\circ = \frac{1}{2\gamma} = \frac{\gamma+1}{2} = \frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

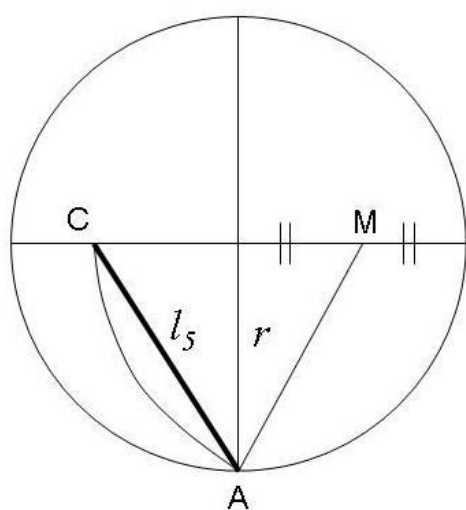
$$\cos 72^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1 = 2 \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{2\sqrt{5}-2}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\gamma}{2}$$

Dunque $\overline{AC}^2 = 2r^2 - 2r^2 \frac{\gamma}{2} = r^2(2 - \gamma)$ da cui $l_5 = \overline{AC} = r\sqrt{2 - \gamma}$ (1)

Ci sono noti dunque seni e coseni dei multipli di 18°

in gradi	in radianti	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste

COSTRUZIONE DEL PENTAGONO CON RIGA E COMPASSO



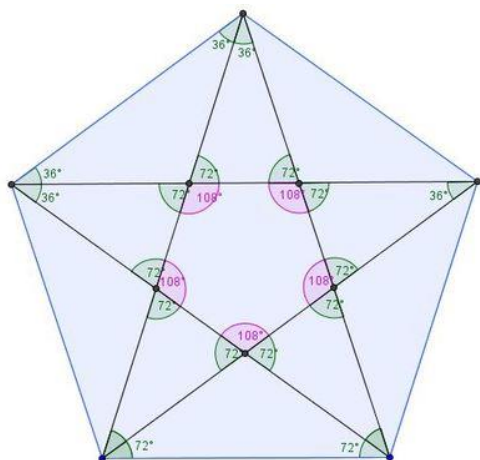
Dalla costruzione del pentagono inscritto con riga e compasso (appresa in prima liceo) si ricava che è:

$$l_5 = \overline{AC} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 r^2} = r\sqrt{1+\gamma^2} \quad (2)$$

Dimostrazione che le formule (1) e (2) coincidono:

$$\begin{aligned}
 l_5 = \overline{AC} &= r\sqrt{2-\gamma} = r\sqrt{1+\gamma^2} \\
 &\Leftrightarrow 2-\gamma = 1+\gamma^2 \\
 &\Leftrightarrow \gamma^2 + \gamma - 1 = 0
 \end{aligned}$$

COSTRUZIONE DEL PENTAGONO A PARTIRE DAL LATO



Occorre osservare che il triangolo isoscele $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ – che è servito per risalire al lato l_{10} del decagono regolare a partire dal raggio – è anche il triangolo che il lato l_5 del pentagono regolare forma con le due diagonali ad esso consecutive: se ne ricava (immaginando il pentagono inscritto nella medesima circonferenza, e applicando la proporzionalità tra i lati) che

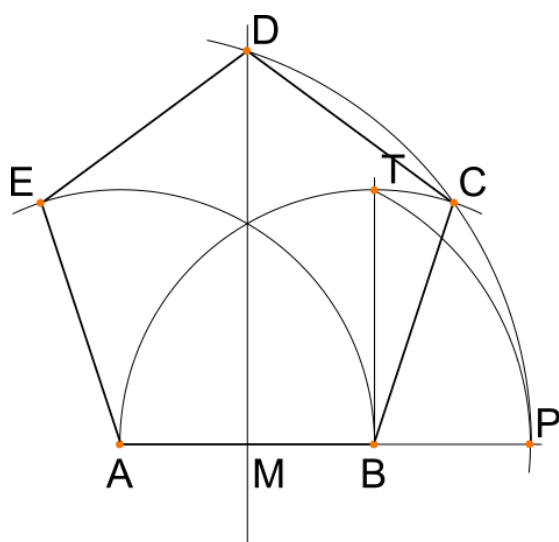
$$d_5 : r = l_5 : l_{10}$$

ossia $d_5 : r = l_5 : \gamma r$

da cui si ricava che è

$$d_5 = \frac{l_5}{\gamma} = \Phi l_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} l_5$$

Per costruire dunque il pentagono regolare a partire dal lato l_5 occorre dunque costruire il triangolo isoscele di lati l_5 , Φl_5 , Φl_5 .



$$\overline{AB} = l_5 = \overline{BT} \quad \overline{MB} = \frac{l_5}{2}$$

$$\overline{MT} = \frac{\sqrt{5}}{2} l_5 = \overline{MP}$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{l_5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} l_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} l_5 = \Phi l_5 = d_5 \\ &= \overline{AC} = \overline{AD} \end{aligned}$$

IL PROBLEMA DI FIBONACCI... e il numero Φ

Una coppia di conigli diventa fertile dopo un mese e genera un'altra coppia di conigli, la quale a sua volta diventerà fertile dopo un mese generando a sua volta una coppia di conigli. Dal momento in cui diventa fertile, una coppia di conigli genera un'ulteriore coppia di conigli ogni mese. Quante sono le coppie di conigli dopo n mesi?

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \end{cases}$$

La successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Che c'entrano i conigli col numero aureo Φ ?

Calcolando la successione dei rapporti $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ della successione di Fibonacci si ottengono i seguenti valori: 1, 2, $\frac{3}{2} = 1,5$, $\frac{5}{3} = 1,6\bar{6}$, $\frac{8}{5} = 1,6$, $\frac{13}{8} = 1,625..$

Tali numeri oscillano attorno a Φ (uno sopra, uno sotto, uno sopra, uno sotto...)

avvicinandosi sempre più a Φ . Vuoi vedere che è $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$? In effetti

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n-1} + f_n}{f_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} + 1$ ossia, detto L il valore di quel limite, deve essere $L = \frac{1}{L} + 1$. Questa equazione è soddisfatta proprio dal numero Φ .