

Limite di funzione composta

È vero che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ e $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0$

Sembrerebbe di sì... e invece no.

Se fosse, ad esempio, $f(x) = 3$ per ogni valore di x
(non è necessaria la continuità in x_0)

$$e \quad g(y) = \begin{cases} y+1 & \text{per } y \neq 3 \\ 5 & \text{per } y = 3 \end{cases}$$

sarebbe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{y \rightarrow 3} g(y) = 4$

ma non è vero che $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = 4$

Infatti per ogni valore di x $g(f(x)) = 5$

e dunque anche $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = 5$.

Il teorema dunque non vale. **Se però facciamo l'ipotesi che la g sia continua in y_0 ,**
ovvero che sia $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0 = g(y_0)$, allora il teorema diventa vero.

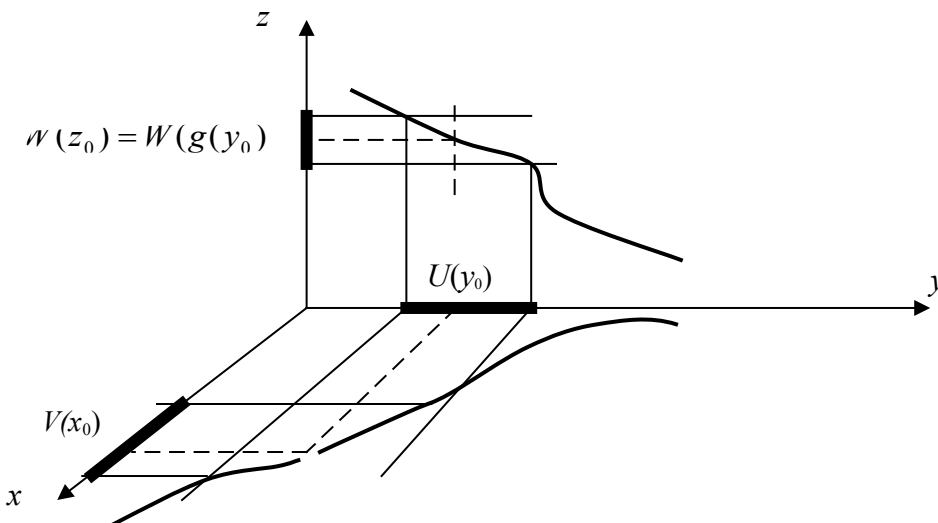
Dim. (vedi figura sotto)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \text{significa} \quad \forall U(y_0) \exists V(x_0) \cdot \text{tale che} \cdot x \in V(x_0) \cap Df - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U(y_0)$$

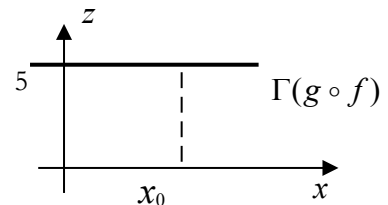
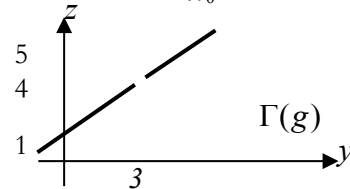
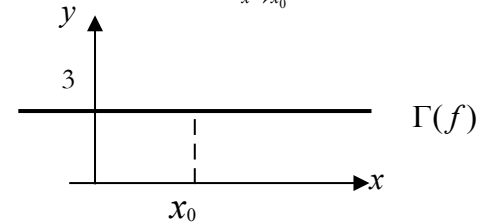
$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0 = g(y_0) \quad \forall W(z_0) \exists U(y_0) \cdot \text{tale che} \cdot y \in U(y_0) \cap Dg - \{y_0\} \Rightarrow g(y) \in W(z_0)$$

Dall'insieme delle due scritture si ricava che

$$\forall W(z_0) \exists V(x_0) \cdot \text{tale che} \cdot x \in V(x_0) \cap Df - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \in W(z_0)$$



allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z_0$?



Notiamo che vale la scrittura $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ anche nel caso che la $f(x)$ non sia continua in x_0 , scrittura che diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(f(x_0))$$

nel caso che la f sia continua in x_0 .