

La funzione integrale

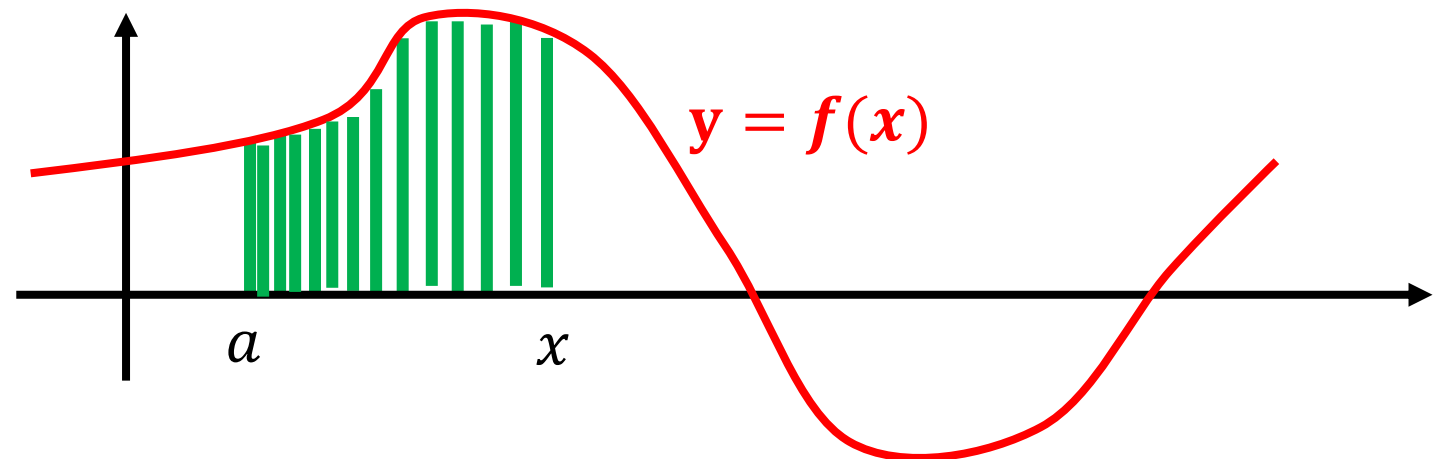
Definizione di funzione integrale

Data una funzione $f(x)$ definita continua in un intervallo I , ad essa associamo una funzione $F_a(x)$, che chiameremo funzione integrale della f di punto iniziale a , e che scriveremo in questo modo

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

che, per ogni x , ci restituisca l'area (con segno) sottesa alla f nell'intervallo $I = [a; x]$

Non sappiamo se tale funzione esista.
Non sappiamo come si fa a calcolarla.
Ma certamente avrà delle proprietà



Proprietà della funzione integrale

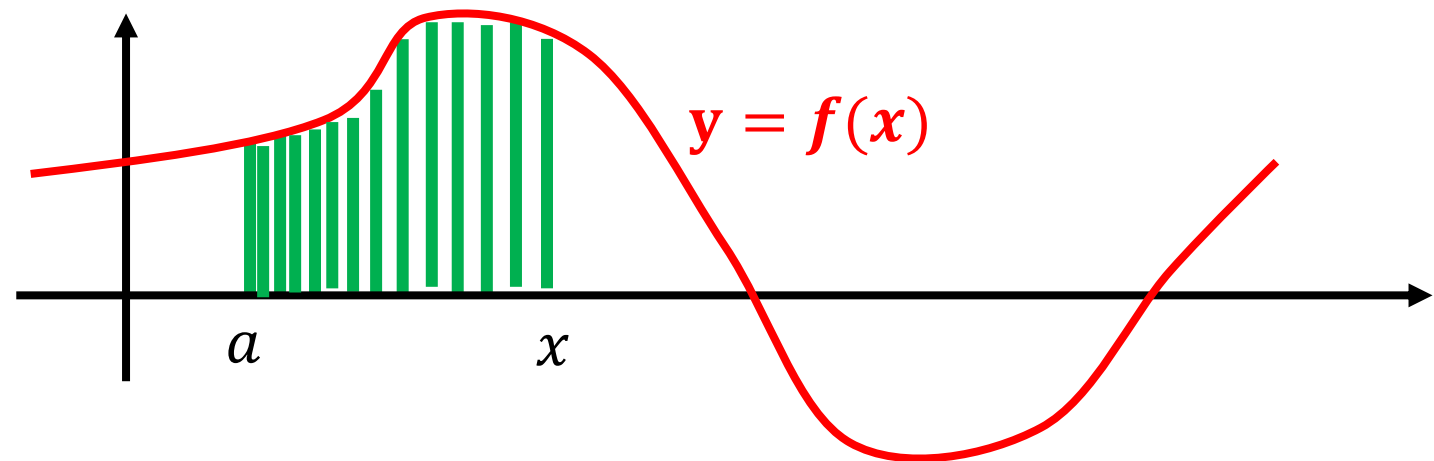
Banalmente deve essere $F_a(a) = 0$

Negli intervalli dove $f(x) > 0$ sarà $F_a(x)$ crescente

Negli intervalli dove $f(x) < 0$ sarà $F_a(x)$ decrescente

Laddove il grafico della $f(x)$ taglia l'asse delle ascisse decrescendo $F_a(x)$ avrà un massimo

Laddove il grafico della $f(x)$ taglia l'asse delle ascisse crescendo $F_a(x)$ avrà un minimo

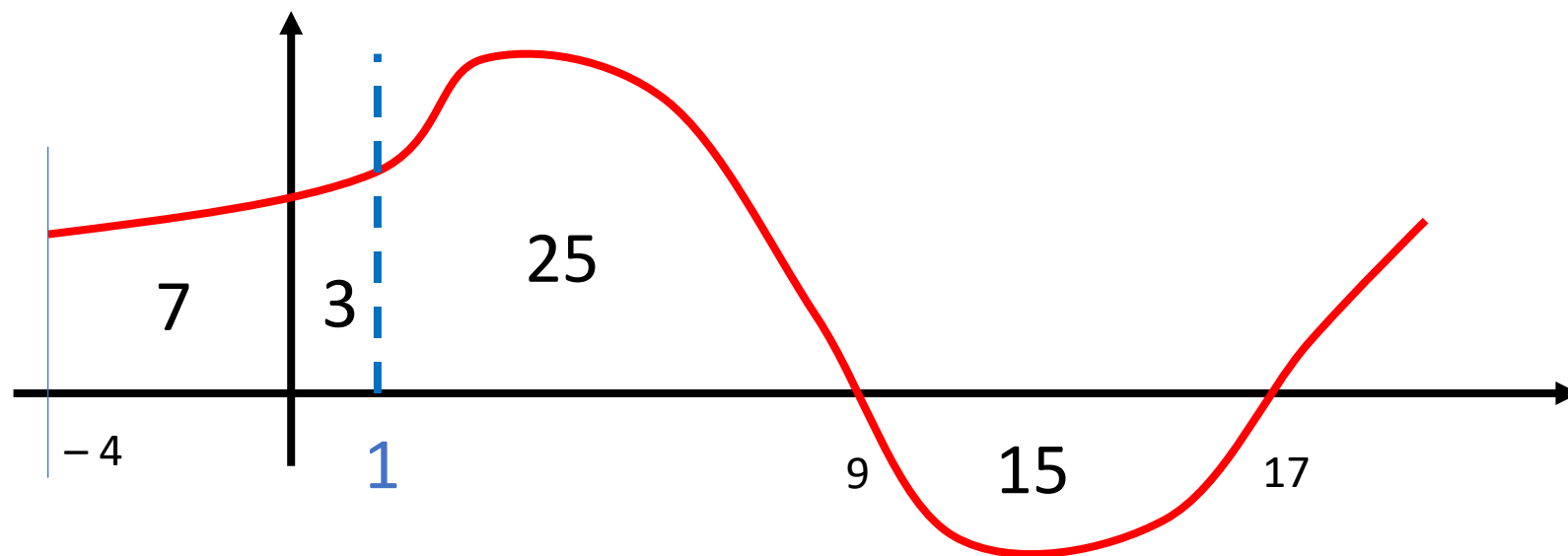


Esempio con qualche numero

È data la $y=f(x)$ rappresentata qui a fianco.

Che caratteristiche avrà la sua funzione integrale $F(x)$ di punto iniziale 1?

$$F_1(x) = \int_1^x f(t) dt$$



La $F_1(x)$ in 1 vale 0 (Infatti $F_1(1)$ è l'area sottesa al grafico della f da 1 a 1)
Poi man mano che la x si sposta verso destra la $F(x)$ crescerà (si sta aggiungendo area positiva). Arrivati in 9 la $F_1(x)$ avrà raggiunto il suo massimo (ed è facile dedurre dalla figura che $F_1(9) = 25$); spostandosi ancora a destra, la $F(x)$ comincerà a decrescere (si sta aggiungendo «area negativa». Questo fino a 17). In 17 la $F_1(x)$ avrà il suo minimo relativo: $F_1(17) = 25 - 15 = 10$; dopo il 17 la $F_1(x)$ riprenderà a crescere.

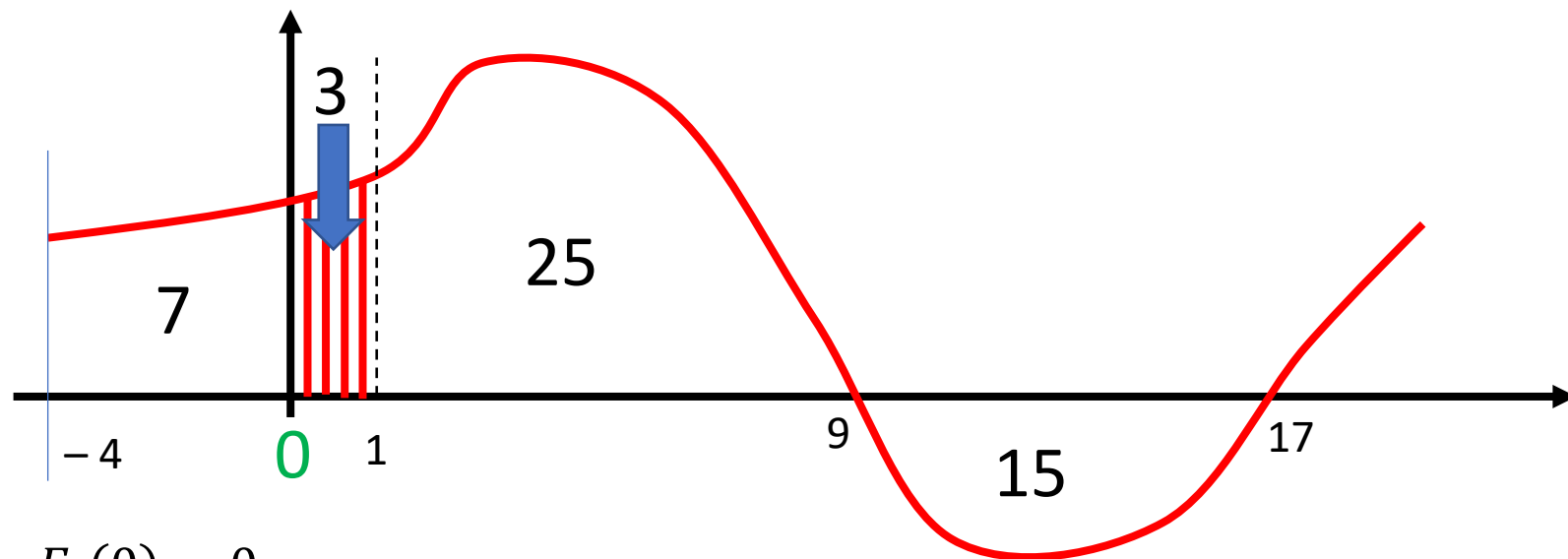
E se, sempre calcolando l'area a partire da $x=1$, anziché verso destra ci fossimo spostati verso sinistra? Beh, essendo a sinistra di 1 la $f(x)>0$, avremmo «accumulato area negativa». Si vede chiaramente che è $F_1(0) = -3$ e $F_1(-4) = -10$

E se cambia l'estremo di integrazione?

Se invece di cominciare a «macinare» area a partire da $x=1$ fossimo partiti... da $x=0$?

Che caratteristiche avrà in tal caso la funzione integrale $F(x)$ di punto iniziale 0?

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$



$$F_0(0) = 0$$

$$F_0(1) = 3$$

$$F_0(9) = 3 + 25 = 28$$

$$F_0(17) = 3 + 25 - 15 = 18$$

$$F_0(-4) = -7$$

È facile intuire che la $F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ rispetto alla $F_1(x) = \int_1^x f(t) dt$ assumerà valori aumentati di 3, valore che corrisponde a $\int_0^1 f(x) dx$

In effetti...

Tutte le funzioni integrali $F_a(x)$ della $f(x)$ differiscono per una costante, che dipende dal punto iniziale a dell'integrazione.

Se tali funzioni differiscono per una costante allora le loro derivate coincidono: quindi possiamo dire che $F_1'(x) = F_0'(x) = \dots = F_a'(x)$

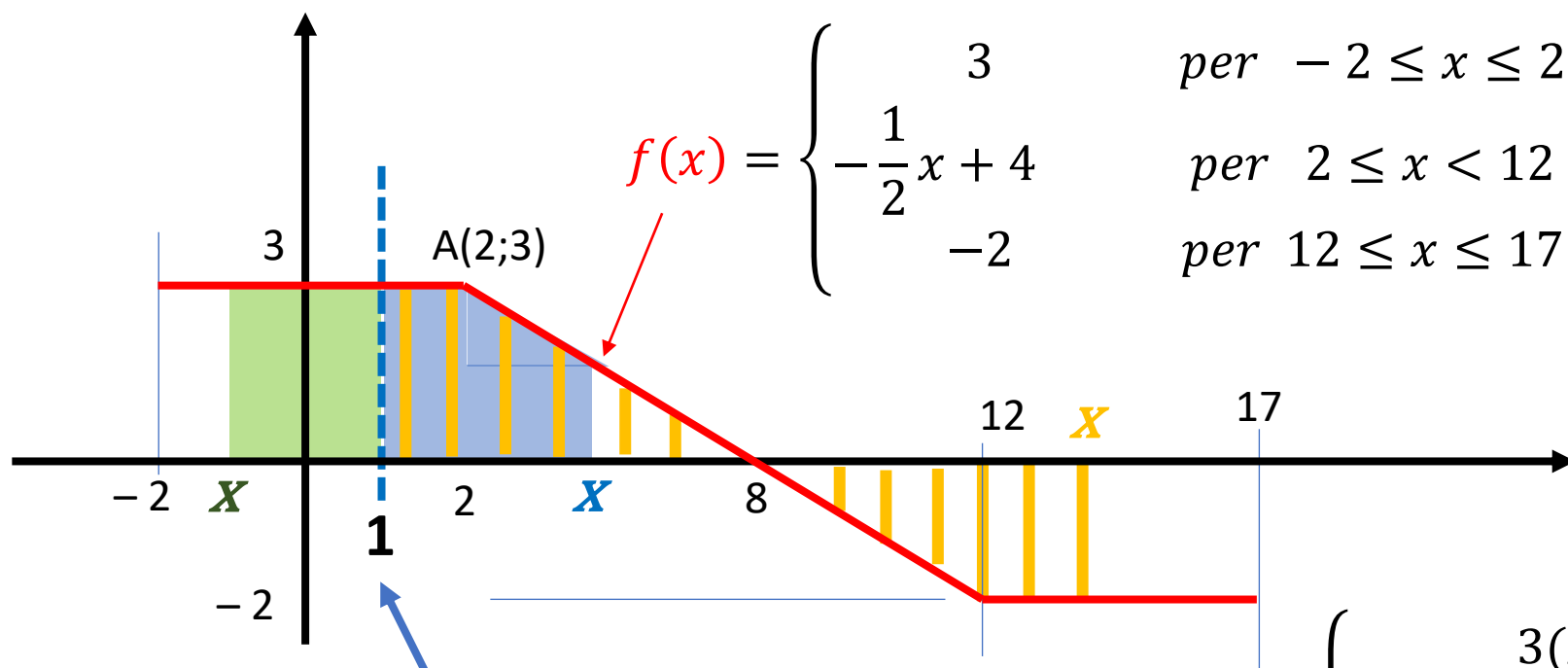
A questo punto, quando si parla della derivata della funzione integrale, si può omettere di scrivere l'estremo a .

Ma quanto vale $F'(x)$?

Ce lo dirà il **Teorema fondamentale del Calcolo integrale**

Esercizio sulla funzione integrale

È data la funzione $y=f(x)$ rappresentata in figura. È una tri-definita, ed essendo il suo grafico una **spezzata** è facile ricavare la sua (triplice) espressione analitica.



L'area sottesa al grafico di $y=f(x)$ a partire da $x=1$ avrà anch'essa una triplice espressione analitica, che in questo caso sarà facile ricavare, trattandosi di calcolare rettangoli, trapezi e triangoli. **Attenti ai segni!**

L'area sottesa fino a x si calcola sempre a partire da 1

$$F_1(x) = \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} 3(x-1) & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 + \frac{1}{2}(2 + f(x))(x-2) & \text{se } 2 \leq x < 12 \\ 3 + 9 - 4 - 2(x-12) & \text{se } 12 \leq x \leq 17 \end{cases}$$

Esercizio sulla funzione integrale (segue)

Fatti i conti che mancavano, troviamo l'espressione finita della $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \int_1^x f(t)dt = \begin{cases} 3x - 3 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 4 & \text{se } 2 \leq x < 12 \\ -2x + 32 & \text{se } 12 \leq x \leq 17 \end{cases}$$

Provate ora a disegnare il grafico della $F_1(x)$. Fatto?

Provate ora a disegnare il grafico della $F_1'(x)$. Notate qualcosa?