

INTEGRALE DI RAZIONALE FRATTA

Ci concentriamo sulle razionali fratte con denominatore di 2° grado con $\Delta < 0$

L'integrale ridotto in forma normale $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$, una volta separato il termine

logaritmico, ci obbliga a calcolare un integrale del tipo: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

Ebbene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{4a^2}{-\Delta} \int \frac{1}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4a}{-\Delta} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{1}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1} d\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c\end{aligned}$$

Si osservi che il numeratore della frazione in parentesi è la derivata del denominatore della frazione.

Esercizio (rognosetto):

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}} dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} dx = \int \frac{1}{2+\tan^2 x} d \tan x = \begin{cases} y = \tan x \\ \int \frac{1}{2+y^2} dy = \end{cases}$$

.. e usando la formula:

$$\dots = \int \frac{1}{2+y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{8}} \arctan \frac{2y}{\sqrt{8}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$$