

GONIOMETRICHE LINEARI

È data l'espressione goniometrica lineare $a \cos x + b \sin x + c$ con a e b noti.

$$\text{È } a \cos x + b \sin x + c = b \left(\frac{a}{b} \cos x + \sin x \right) + c = \dots \quad \text{sia } \boxed{\frac{a}{b} = \tan \alpha} \quad \text{con } \boxed{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} \dots &= b(\tan \alpha \cos x + \sin x) + c = \frac{b}{\cos \alpha} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x) + c = \\ &= \frac{b}{\cos \alpha} \sin(x + \alpha) + c = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}} \sin(x + \alpha) + c = b \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \sin(x + \alpha) + c = \frac{b}{|b|} \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + c \end{aligned}$$

Dunque $\boxed{a \cos x + b \sin x + c = \frac{b}{|b|} \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + c}$ dove $\boxed{\alpha = \arctg \frac{a}{b}}$

Esempio 1: disegnare la curva di equazione $y = 3 \cos x - 4 \sin x + 2$.

È lo stesso che disegnare la curva di equazione $y = -5 \sin(x + \alpha) + 2$ deducibile elementarmente con $\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right)$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$

Esempio 2: studiare il sistema misto

$$\begin{cases} 2 \cos x + 3 \sin x = k \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \pi \end{cases} \quad \text{è equivalente al sistema} \quad \begin{cases} \sqrt{13} \sin(x + \alpha) = k \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \pi \end{cases} \quad \text{ovvero al sistema}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x + \alpha) \\ y = \frac{k}{\sqrt{13}} \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \pi \end{cases} \quad \text{con} \quad \tan \alpha = \frac{2}{3} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ per esser più precisi: } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

Ricaviamo che è $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

(nel I e II quadrante il seno ha lo stesso segno della tangente e il coseno è positivo)

Troviamo gli estremi dell'arco: è $A = (0; \sin \alpha) = \left(0; \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ dunque $k_A = 2$

$$B = \left(\frac{2}{3} \pi; \sin\left(\frac{2}{3} \pi + \alpha\right)\right) = \left(\frac{2}{3} \pi; \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) = \left(\frac{2}{3} \pi; \frac{3\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{13}}\right) \text{ dunque } k_B = \frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$$

Il punto T di tangenza ha ovviamente ordinata 1 ed è $k_T = \sqrt{13}$. Dunque il sistema misto

ha 1 soluzione per $\frac{3\sqrt{3} - 2}{2} \leq k < 2$ e 2 soluzioni per $2 \leq k \leq \sqrt{13}$.