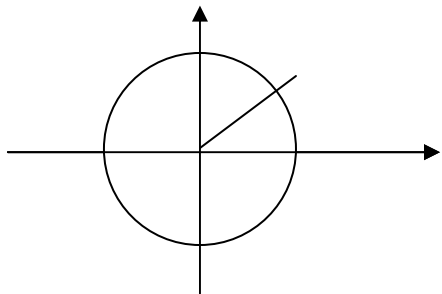


SENO e COSENO CIRCOLARI

Per un punto $P(X;Y)$ della circonferenza unitaria vale la seguente relazione: $X^2 + Y^2 = 1$

Posto $P = (\cos x; \sin x)$

è $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



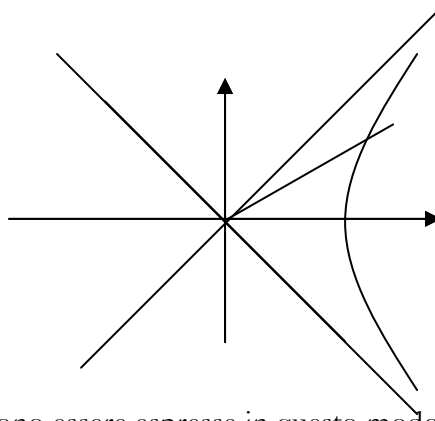
x è l'angolo, ma è anche il doppio dell'area del settore circolare individuato dall'angolo x .

Posto dunque $x = 2A$, le coordinate di P possono essere espresse in questo modo $P(\cos 2A; \sin 2A)$

Analoga cosa può essere fatta nel caso dell'iperbole equilatera: $P(\cosh 2A; \sinh 2A)$

Quanto vale il doppio dell'area del settore iperbolico individuato da un angolo x ?

Le coordinate del punto iperbolico P in funzione dell'angolo x sono date dall'intersezione della curva $X^2 - Y^2 = 1$ con la retta $Y = \tan x X$



$$P(X;Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}; \frac{\tan x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} \right)$$

In coordinate polari, il doppio dell'area del settore iperbolico sotteso da un angolo x è:

$$2A = \int_0^x \rho^2(\theta) d\theta \quad \rho^2(\theta) = X^2(\theta) + Y^2(\theta) = \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$2A = \int_0^x \rho^2 d\theta = \int_0^x \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} d\theta = \int_0^x \frac{1}{1 - \tan^2 \theta} d(\tan \theta) = \int_0^{\tan x} \frac{dy}{1 - y^2} = \ln \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$$

Se ne ricava che

$$e^{4A} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \Rightarrow \tan x = \frac{e^{4A} - 1}{e^{4A} + 1}$$

Ora il punto dell'iperbole è

$$P(X;Y) = P(\cosh x; \sinh x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}; \frac{\tan x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} \right) = \left(\frac{e^{4A} + 1}{2e^{2A}}; \frac{e^{4A} - 1}{2e^{2A}} \right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}; \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

dove, nell'ultima uguaglianza, si è tenuto conto che $x = 2A$