

Dalla sommatoria all'integrale: metodo

Partiamo dall'esempio iniziale: l'integrale di Riemann di una

superficie sottesa a una curva nell'intervallo $[a;b]$.

Abbiamo diviso l'intervallo $[a;b]$ in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e abbiamo approssimato la

superficie sottesa come somma di rettangolini di base Δx e altezza $f_i(x)$, dove $f_i(x)$ era un valore qualsiasi che la funzione assumeva nell'intervallino i -esimo [poteva essere il minimo (plurirettangolo inferiore) o il massimo (plurirettangolo superiore) o anche nessuno dei due].

Superficie del plurirettangolo:

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) \Delta x$$

Quindi siamo passati al limite, che esiste se la funzione è continua:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Volume di un solido di cui si conosca la sezione $S(x)$ perpendicolare all'asse delle x

Dividiamo l'intervallo $[a;b]$ in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e approssimiamo il solido come la somma di tante "fette", ognuna di base $S_i(x)$ e altezza Δx .

Il volume della "plurifetta" è

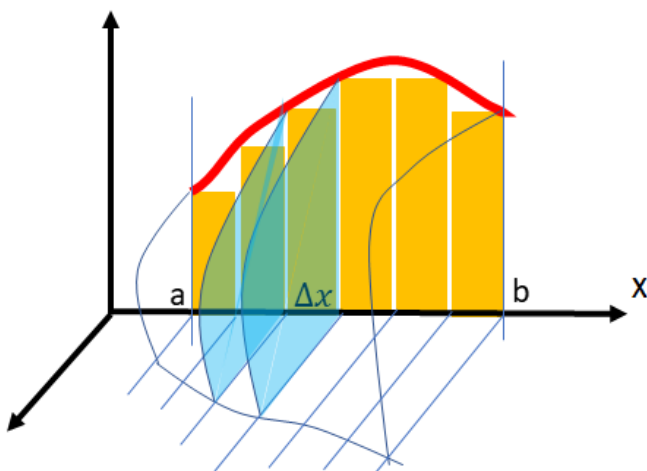
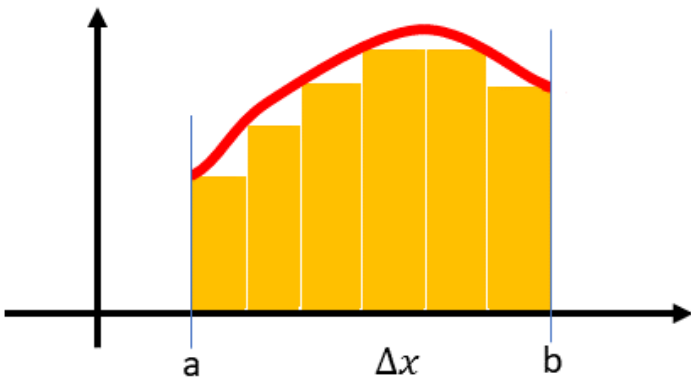
$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n S_i(x) \Delta x$$

Per ottenere il volume del solido si passa al limite

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n S_i(x) \Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

Da cui, **COROLLARIO**, per un **solido di rotazione attorno all'asse delle x** , per il quale $S(x) = \pi f^2(x)$, il volume è:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Lunghezza di un arco di curva definita in [a;b]

Dividiamo l'intervallo [a;b] in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e approssimiamo la curva con una **spezzata** formata da tanti segmentini ognuno dei quali ha lunghezza (dobbiamo esprimerla in funzione di Δx) pari a

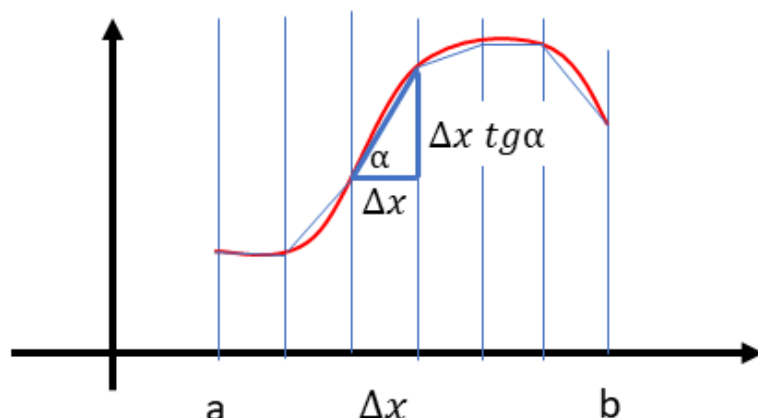
$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Delta x$$

La lunghezza della spezzata è dunque

$$\sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \Delta x$$

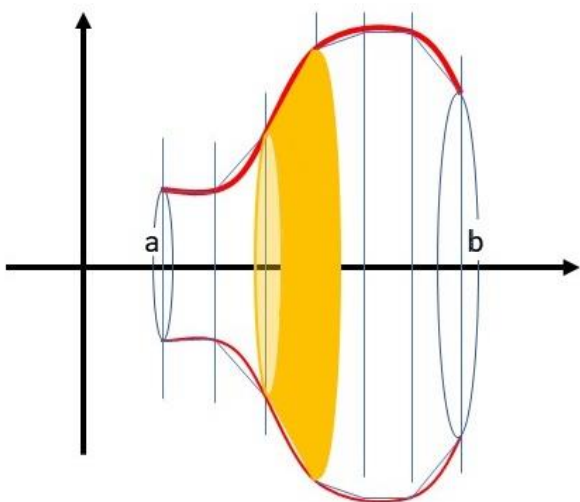
Per trovare la lunghezza della curva bisogna suddividere in un numero sempre maggiore di Δx sempre più piccoli. Quindi si passa al limite e il coefficiente angolare della secante ($\operatorname{tg} \alpha$) diventa l' m della tangente, cioè la derivata della funzione.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Superficie di rotazione

Ruotiamo un arco curva definita in [a;b] attorno all'asse delle x, generando una superficie di rotazione.



Dividiamo come al solito l'intervallo [a;b] in n intervallini di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e approssimiamo ciascun archetto della curva con i segmentini visti prima, ottenendo una spezzata. La spezzata, ruotando attorno all'asse delle x, genererà una superficie formata da tante superficie che sono superficie laterali di tronchi di cono.

Poiché la superficie laterale del tronco di cono è data dalla formula $\pi(R + r)a$, la superficiola i -esima sarà data dalla formula

$$\Delta S_i = \pi[f(x) + f_{i+1}(x)]\Delta x = \pi[f_i(x) + f_{i+1}(x)]\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \Delta x$$

(l'apotema è il ΔL di prima.)

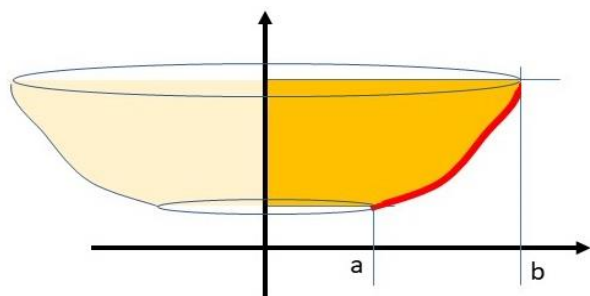
Il "pluritronco" avrà dunque una superficie totale pari a:

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \pi[f_i(x) + f_{i+1}(x)]\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \Delta x$$

e la superficie cercata si otterrà ancora una volta passando al limite:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi[f_i(x) + f_{i+1}(x)]\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \Delta x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Solidi di rotazione attorno all'asse y.



Se la superficie di rotazione si trova tra la curva e l'asse delle y conviene trovare la funzione inversa (supponendo che $f(x)$ sia invertibile) e calcolare l'integrale rispetto alla variabile y:

$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2 dy$$

Metodo dei gusci cilindrici

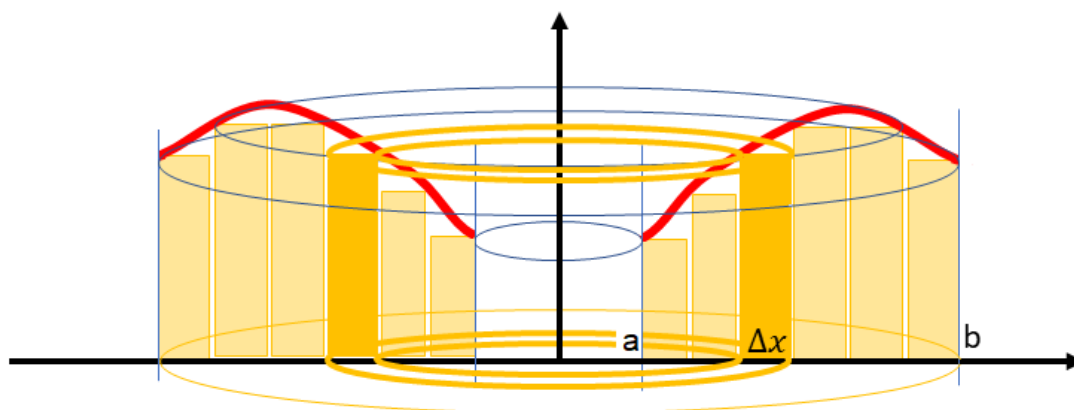
Se però la funzione non è invertibile, oppure se la regione da far ruotare si trova al di sotto del grafico della $y=f(x)$ conviene il metodo dei GUSCI CILINDRICI.

Pensiamo il "ciambellone" come la somma di tanti gusci cilindrici (corone cilindriche ottenute dalla rotazione dei rettangoli di base Δx e altezza $f(x)$ attorno all'asse y. Il **volume del guscio i-esimo** si ottiene sottraendo dal cilindro di raggio $x + \Delta x$ quello di raggio x ; per l'altezza del cilindro si può prendere un qualsiasi valore della $f(x)$ nell'intervallo i-esimo

$$\Delta V_i = \pi(x + \Delta x)^2 f(x_i) - \pi x^2 f(x_i) = \pi[2x\Delta x + (\Delta x)^2]f(x_i)$$

Non siamo riusciti a esprimere il volumetto i-esimo in funzione di Δx : rispetto a tutte le altre volte ci è rimasto quel $(\Delta x)^2$ all'interno della parentesi quadra. Ma se consideriamo che Δx dovrà tendere a 0, quel $(\Delta x)^2$ sarà un infinitesimo di ordine superiore e potremo trascurarlo; anzi, lo facciamo (con leggera libertà) da subito:

$$\Delta V_i = \pi[2x]f(x_i)\Delta x$$



Il volume della "pluriciambella" è

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi(2x)f(x_i)\Delta x$$

e passando al limite, facendo ancora una volta tendere n a $+\infty$ (e Δx a 0), si ottiene:

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi(2x)f(x_i)\Delta x = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$