

CORREZIONE

del II COMPITO DI MATEMATICA del I quadrimestre

Esercizio 1) Determina dominio, segno e codominio della seguente funzione :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

Svolgimento:

Poiché il denominatore ha $\Delta < 0$ (e dunque non si annulla mai) il dominio è $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il segno, poiché il denominatore è sempre positivo, il segno di $f(x)$ coincide con quello del numeratore

Dunque: $f(x) > 0$ se $x > 2$, $f(x) = 0$ se $x = 2$, $f(x) < 0$ se $x < 2$.

Per trovare il codominio dobbiamo trovare i k per cui l'equazione $f(x) = k$ ammette soluzioni.

$\frac{x-2}{x^2+x+1} = k$ è equivalente a $x-2 = k(x^2+x+1)$ ossia a $kx^2 + (k-1)x + (k+1) = 0$ equazione di 2° grado che ha soluzioni se è il suo $\Delta \geq 0$

Esercizio 2) Sul piano cartesiano Oxy è dato il triangolo ABD di cui si conoscono i vertici $A(20; -4)$, $B(0;5)$ e l'ortocentro $O(0;0)$.

Trovato il terzo vertice D e il baricentro G, verifica che il circocentro C sta sulla retta OG (retta di Eulero) e che $GO = 2 CG$.

Svolgimento:

Due delle altezze del triangolo sono la retta AO ($y = -\frac{1}{5}x$) e la retta BO ($x = 0$); le due basi BC e AC stanno dunque sulle rette perpendicolari a quelle e passanti la prima per B e la seconda per A.

$$\text{retta BC: } y - 5 = 5(x - 0)$$

$$\text{retta AC: } y = -4$$

Il punto C sarà l'intersezione delle due: $C = \left(-\frac{9}{5}; -4\right)$

Il baricentro lo troviamo con la formula nota $G = \left(\frac{20+0-\frac{9}{5}}{3}; \frac{-4+5-4}{3}\right) = \left(\frac{91}{15}; -1\right)$

Per il circocentro cerchiamo due assi: conviene sicuramente scegliere l'asse di AD: se il punto medio di AD è $N = \left(\frac{91}{10}; -4\right)$ allora l'asse di AD, dovendo essere perpendicolare a

una retta orizzontale, avrà la semplice equazione: $x = \frac{91}{10}$

Sia M il punto medio di AB: $M = \left(10; \frac{1}{2}\right)$

Poiché $m_{AB} = -\frac{9}{20}$, l'asse di AB ha equazione $y - \frac{1}{2} = \frac{20}{9}(x - 10)$

Mettendo a sistema le equazioni dei due assi trovati si trova $C = \left(\frac{91}{10}; -\frac{3}{2}\right)$

Si osserva facilmente che le coordinate di C soddisfano l'equazione della retta OG, che è $y = -\frac{15}{91}x$ (la retta per O-G-C è detta retta di Eulero)

Si calcola (meglio se usando le proprietà delle potenze) che $GO = 2 CG$.

Esercizio 3) Trova l'incentro I del triangolo di vertici U(-5;0), V(16;0), Z(0;12)

Svolgimento:

Retta UV: $y = 0$

Retta UZ: $y = \frac{12}{5}x + 12$, ossia in forma implicita $12x - 5y + 60 = 0$

Retta VZ: $y = -\frac{3}{4}x + 12$, ossia in forma implicita $3x + 4y - 48 = 0$

Data la semplicità della prime equazione, conviene trovare le bisettrici degli angoli in U e in V.

Bisettrici degli angoli in U: $\frac{12x - 5y + 60}{\sqrt{169}} = \pm y$ ossia $12x - 5y + 60 = \pm 13y$

che porge le due equazioni $12x + 8y + 60 = 0 \vee 12x - 18y + 60 = 0$

ossia $y = -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2} \vee y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

Bisettrici degli angoli in V: $\frac{3x + 4y - 48}{\sqrt{25}} = \pm y$ ossia $3x + 4y - 48 = \pm 5y$

che porge le due equazioni $3x + 9y - 48 = 0 \vee 3x - y - 48 = 0$

ossia $y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3} \vee y = 3x + 48$

Aiutandoci col disegno si osserva che le bisettrici interne sono le due di equazione

$y = -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$ e $y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$

che, messe a sistema, danno come soluzione $I = \left(2; \frac{14}{3}\right)$

Esercizio 4) Sono dati O(0;0) e E(5;-1). Determina i punti P(x_P ; y_P) della retta r di equazione $y = -2x - 2$ che formano con il segmento OE un triangolo di area $\frac{19}{2}$.

Svolgimento:

I punti $P(x_P; y_P)$ richiesti hanno le seguenti due proprietà.

1) appartengono alla retta r (e dunque ne soddisfano l'equazione);

$$2) \overline{OE} \cdot \text{dist}(P; \text{retta OE}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

Poiché $\overline{OE} = \sqrt{26}$ e la retta OE ha equazione $x + 5y = 0$ si tratta dunque di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_P = -2x_P - 2 \\ \sqrt{26} \cdot \frac{|x_P + 5y_P|}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_P = -2x_P - 2 \\ |x_P + 5y_P| = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_P = -2x_P - 2 \\ |x_P - 10x_P - 10| = 19 \end{cases}$$

Risolvendo la risolvente $-9x_P - 10 = \pm 19$ si ottiene $x_P = 1 \vee x_P = -\frac{29}{9}$

I due punti cercati sono dunque $P_1 = (1; -4)$ e $P_2 = \left(-\frac{29}{9}; \frac{40}{9}\right)$

Esercizio 5) Disegna il grafico della spezzata s di equazione: $|x + 2| - |2x| - y = 0$.

5a) Per quali valori di k la retta di equazione $y = 2x + k$ interseca la spezzata s ?

Svolgimento:

I quattro casi dati dai due moduli si riducono a tre (come anche mostrerebbe un grafico di segno degli argomenti dei moduli stessi)

$$|x + 2| - |2x| - y = 0 \text{ equivale a } \begin{cases} x < -2 \\ -x - 2 + 2x - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x + 2 + 2x - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ossia a } \begin{cases} x < -2 \\ y = x - 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \text{ che è l'equazione di una spezzata.}$$

Disegnando alcune rette del fascio improprio di equazione $y = 2x + k$ si osserva che le rette del fascio tagliano la spezzata s qualunque sia il valore di k .