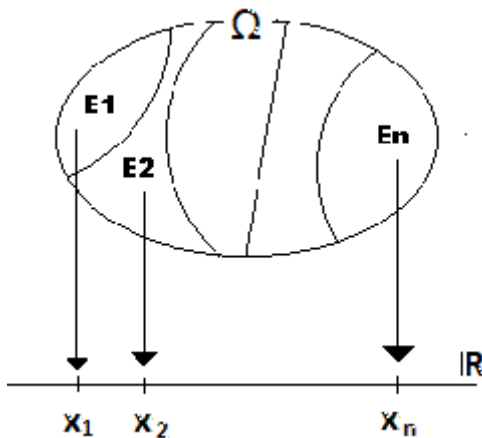


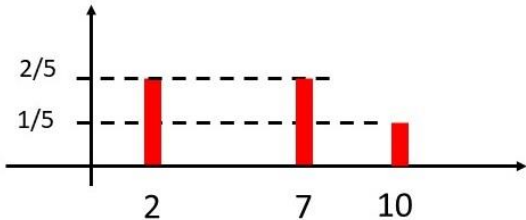
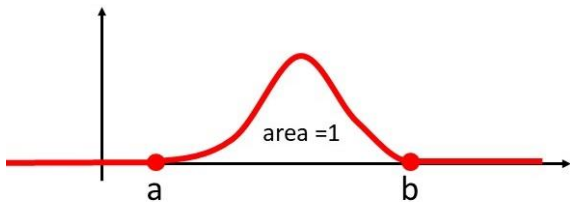
VARIABILI ALEATORIE (o CASUALI)



Dato uno spazio di probabilità Ω (quello che alcuni testi chiamano U), una **VARIABILE ALEATORIA** **X** è una qualsiasi funzione che ha per dominio gli **elementi di una partizione** di Ω (cioè un insieme di eventi a due a due disgiunti ed esaustivi) e per codominio un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

L'utilità di una v.a. è che trasferisce le informazioni probabilistiche da uno spazio qualsiasi (a volte non numerico) a $\mathbb{R}$, dove (in teoria) sappiamo fare tutto.

Se la X assume valori discreti (continui) la v.a. si dirà discreta (continua).

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE	VARIABILI ALEATORIE CONTINUE												
La probabilità è concentrata su un insieme discreto di numeri reali	La probabilità è distribuita su un intervallo continuo di numeri reali												
La distribuzione è data tramite tabelle <table><tr><td>X_i</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>...</td><td>X_n</td></tr><tr><td>P_i</td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>...</td><td>P_n</td></tr></table>	X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_n	P_i	P_1	P_2	P_3	...	P_n	La distribuzione è data tramite una funzione densità $f(x)$ mai negativa, il cui integrale da $-\infty$ a $+\infty$ vale 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_n								
P_i	P_1	P_2	P_3	...	P_n								
Le p_i ovviamente sono tutte positive e deve essere $\sum_i p_i = 1$ n può anche essere infinito	Se la probabilità è distribuita solo nell'intervallo $[a;b]$ la v.a. si dice concentrata in $[a;b]$. In tal caso $\int_a^b f(x)dx = 1$												
ESEMPI													
V.A. che può assumere tre valori <table><tr><td>X_i</td><td>2</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>P_i</td><td>2/5</td><td>2/5</td><td>1/5</td></tr></table> 	X_i	2	7	10	P_i	2/5	2/5	1/5	V.A. che può assumere un qualsiasi valore dell'intervallo $[a;b]$ 				
X_i	2	7	10										
P_i	2/5	2/5	1/5										

Sia per le v.a. discrete che per quelle continue è definita la

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F(x) = \text{Prob}\{X \leq x\}$$

che fornisce la probabilità (cumulata) di ottenere un valore minore o uguale di x .
Facendo riferimento agli esempi della pagina precedente...

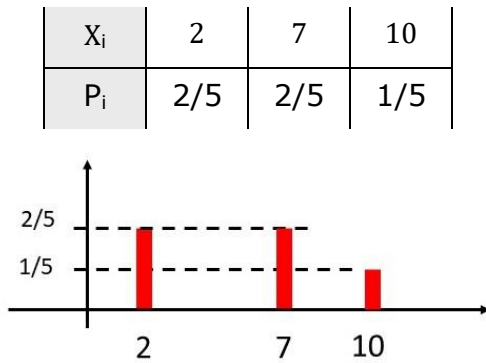
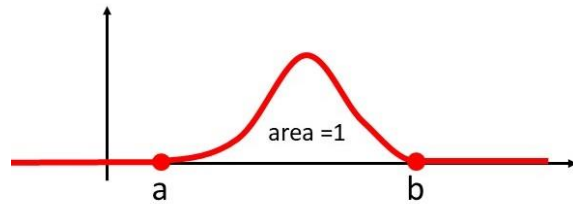


Grafico della densità $f(x)$

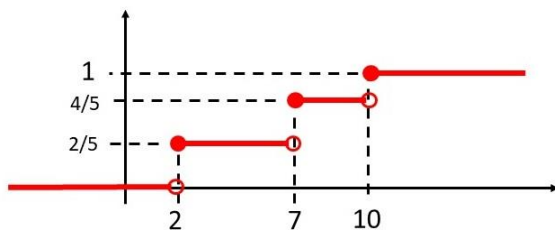


... la funzione di ripartizione $F(x)$, che è definita come

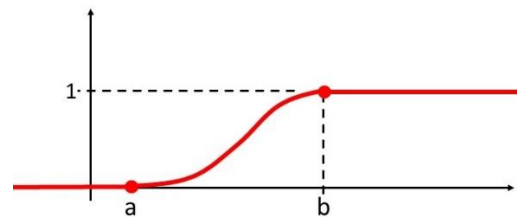
$$F(x) = \text{Prob}\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$$F(x) = \text{Prob}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

risulta allora avere questo grafico



La funzione di ripartizione $F(x)$ presenta dei salti in corrispondenza dei valori dove è concentrata la probabilità.



Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che la derivata della funzione di ripartizione è la funzione densità: $F'(x) = f(x)$

Caratteristiche della funzione di ripartizione

- non è mai decrescente (è a gradini, se la V.A. è discreta)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ cioè in ogni punto è continua da destra
- $F(x_0) - F(x_0^-) = p(X = x_0)$ Questa formula ha senso per le v.a. discrete, dove la probabilità è concentrata in singoli punti. (Per le v.a. continue la probabilità di ogni singolo punto vale 0)

MEDIA DI UNA V.A.

$m = E(X) = \sum_i x_i p_i$	$m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
-----------------------------	---

VARIANZA DI UNA V.A.

$Var(X) = \sum_i (x_i - m)^2 p_i$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx$
-----------------------------------	---

Se X^2 è la v.a. i cui valori sono stati elevati al quadrato, si dimostra che vale sempre la seguente relazione $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

SCARTO QUADRATICO MEDIO DI UNA V.A.

(o deviazione standard)

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Operazioni con le variabili aleatorie

Se si somma a ciascun valore di una v.a. X il valore b si ottiene una nuova v.a. Y definita come $Y = X + b$

Se si moltiplica ciascun valore di una v.a. X per il valore a si ottiene una nuova v.a. Y definita come $Y = aX$

Se si sommano i valori di una v.a. X con i valori di una v.a. Y si ottiene una nuova v.a. Z definita come $Z = X + Y$

Proprietà della media	Proprietà della varianza
$E(X + b) = E(X) + b$	$Var(X + b) = Var(X)$
$E(aX) = aE(X)$	$Var(aX) = a^2 Var(X)$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ se le v.a. X e Y sono indipendenti

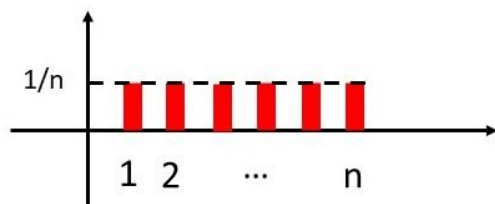
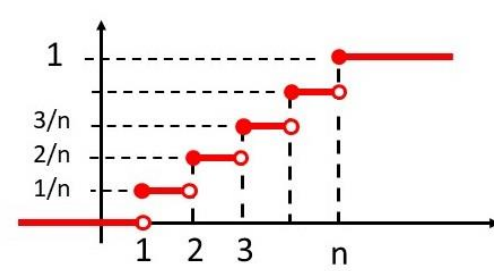
(Due variabile aleatorie si dicono indipendenti se il risultato di una non influenza in alcun modo il risultato dell'altra)

VARIABILI ALEATORIE DI USO PIÙ COMUNE

DISCRETE

UNIFORME $U(n)$

Assume tutti i valori naturali tra 1 e n , tutti con la medesima probabilità

Distribuzione	Funzione di ripartizione												
<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td><td>n</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$\frac{1}{n}$</td><td>$\frac{1}{n}$</td><td>$\frac{1}{n}$</td><td></td><td>$\frac{1}{n}$</td></tr></table> 	x_i	1	2	3	...	n	p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ 
x_i	1	2	3	...	n								
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$								
$E(U(n))=(n+1)/2$	$Var(U(n))= ...$												

ESPERIMENTO BERNOULLIANO $B(1; p)$

È un esperimento che può avere due risultati: Successo e Insuccesso (l'insuccesso è l'evento contrario ed è spesso indicato anche con S soprassegnato)

ω_i	S	I
P_i	p	$1 - p$

$1 - p$ è spesso indicato con q

Dall'esperimento bernoulliano si ricava in maniera naturale la

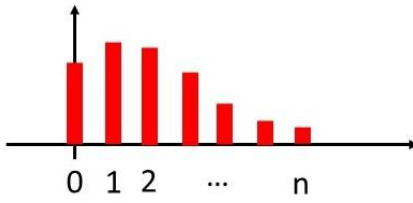
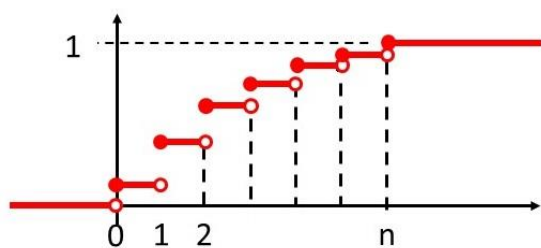
V.A. DI BERNOULLI $B(1; p)$

Conta il numero di successi in un tentativo quando la probabilità del successo è p

Distribuzione	Funzione di ripartizione						
<table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$1 - p$</td><td>p</td></tr></table>	x_i	0	1	p_i	$1 - p$	p	$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$
x_i	0	1					
p_i	$1 - p$	p					
$E(B(1;p))=p$	$Var(B(1;p))=p(1-p)=pq$						

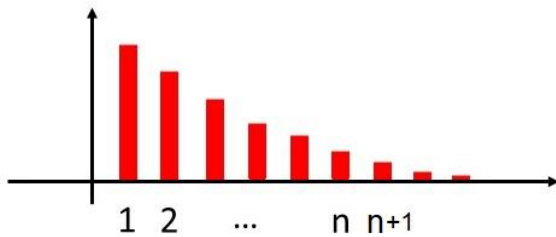
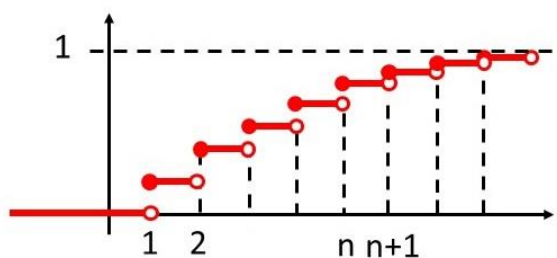
Variabile aleatoria **BINOMIALE** $B(n; p)$

Calcola la probabilità di avere k successi su n tentativi supponendo che in ogni tentativo la probabilità del successo sia p . In sostanza si ripete l'esperimento bernoulliano n volte. La v.a. assume i valori naturali tra 0 e n .

Distribuzione	Funzione di ripartizione																
<table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>k</td><td>...</td><td>n</td></tr><tr><td>p_i</td><td>p_0</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>...</td><td>p_k</td><td>...</td><td>p_n</td></tr></table> $p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ La presenza dei coefficienti binomiali dà il nome alla variabile 	x_i	0	1	2	...	k	...	n	p_i	p_0	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n	$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ 
x_i	0	1	2	...	k	...	n										
p_i	p_0	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n										
$E(B(n; p))=np$	$Var(B(n; p))=np(1-p)=npq$																
Questi risultati, oltre che con le usuali definizioni di media e varianza, si possono dedurre pensando che la $B(n;p)$ si ottiene sommando n volte la $B(1;p)$ e applicando le proprietà della somma di v.a.																	

Variabile aleatoria **GEOMETRICA** $G(p)$

Conta quante volte bisogna ripetere l'esperimento bernoulliano **per avere successo per la prima volta**.

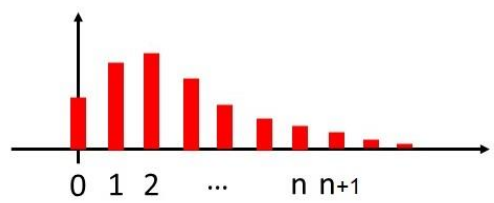
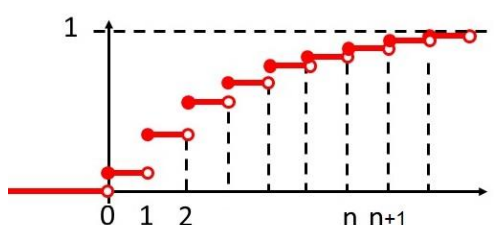
Distribuzione	Funzione di ripartizione														
<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td><td>k</td><td>...</td></tr><tr><td>p_i</td><td>p</td><td>$p(1-p)$ $=pq$</td><td>$p(1-p)^2$ $=pq^2$</td><td></td><td>$p(1-p)^k$ $=pq^k$</td><td></td></tr></table> le probabilità costituiscono una serie geometrica di ragione q 	x_i	1	2	3	...	k	...	p_i	p	$p(1-p)$ $=pq$	$p(1-p)^2$ $=pq^2$		$p(1-p)^k$ $=pq^k$		$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ 
x_i	1	2	3	...	k	...									
p_i	p	$p(1-p)$ $=pq$	$p(1-p)^2$ $=pq^2$		$p(1-p)^k$ $=pq^k$										
$E(G(p))=1/p$	$Var(G(p))=(1-p)/p^2=q/ p^2$														

Variabile aleatoria di **POISSON** $P(\lambda)$ di parametro $\lambda = \mu t$

Un processo poissoniano di nascite è caratterizzato dall'ipotesi che la probabilità del verificarsi di un *evento* in un intervallo infinitesimo sia direttamente proporzionale all'intervallo stesso.

Se μ è il numero medio di *nascite/eventi* in un dato intervallo di tempo, questa v.a. ci dà la probabilità di avere k *eventi* nell'intervallo di tempo t

Esempio: se in un ospedale nascono mediamente 120 bambini all'anno ($\mu = 120/\text{anno}$) e vogliamo conoscere qual è la probabilità che nascano k bambini in $t = 1$ mese, il parametro di questa variabile è $\lambda = (120/\text{anno})(1 \text{ mese}) = 10$

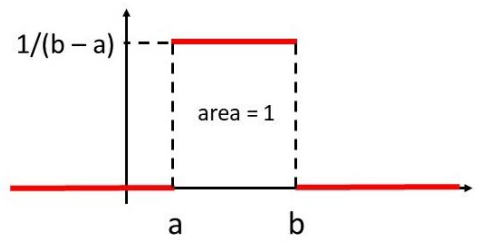
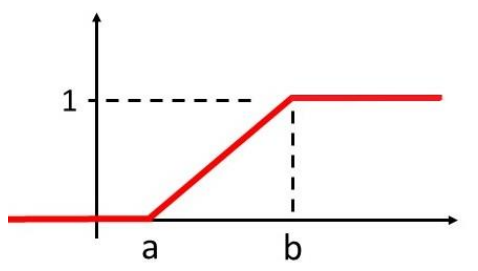
Distribuzione	Funzione di ripartizione														
<table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>k</td><td>...</td></tr><tr><td>p_i</td><td>p_0</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td></td><td>p_k</td><td></td></tr></table> $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 	x_i	0	1	2	...	k	...	p_i	p_0	p_1	p_2		p_k		$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ 
x_i	0	1	2	...	k	...									
p_i	p_0	p_1	p_2		p_k										
$E(P(\lambda)) = \lambda$	$Var(P(\lambda)) = \lambda$														

Come anticipato sopra a proposito della v.a. binomiale, poiché il calcolo dei coefficienti binomiali spesso è laborioso, laddove è possibile si preferisce approssimare la $B(n; p)$ (che ha media np) con la $P(\lambda)$ (che ha media λ) di parametro $\lambda = np$

Ciò è possibile, anzi consigliato, e tanto più preciso quanto più p è piccolo (facciamo... minore di 0,2) e n è grande (facciamo... maggiore di 30).

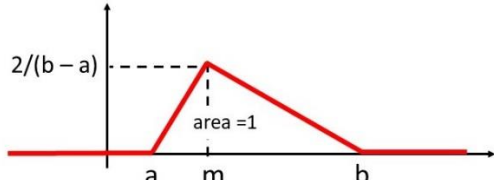
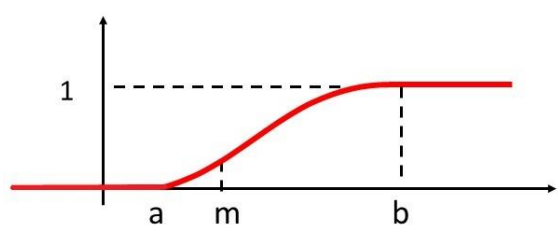
CONTINUE

RETTANGOLARE O UNIFORME $R(a; b)$ concentrata nell'intervallo $[a; b]$
 prende il nome dalla forma della funzione densità

Distribuzione o densità	Funzione di ripartizione
$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ vel } x > b \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b \end{cases}$ 	$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \text{ è}$  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{b-a}{b-a}(x-a) & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
$E(R(a; b)) = (a+b)/2$	$Var(R(a; b)) = \dots$

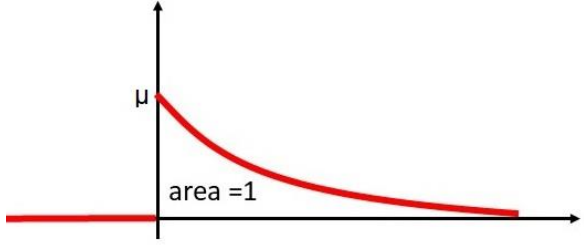
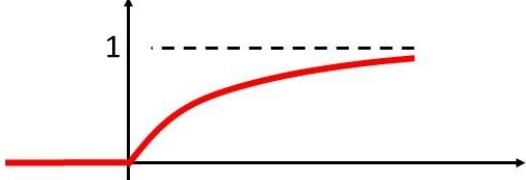
TRIANGOLARE $T(a; m; b)$

Prende il nome dalla forma della funzione densità che ha il massimo in m , un valore compreso nell'intervallo $[a; b]$

Distribuzione o densità	Funzione di ripartizione
$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ vel } x \geq b \\ \frac{2}{(b-a)(m-a)}(x-a) & \text{per } a \leq x < m \\ \frac{-2}{(b-a)(b-m)}(x-b) & \text{per } m \leq x < b \end{cases}$ 	$F(x) = Prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \text{ è}$  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \dots & \text{per } a \leq x < m \\ \dots & \text{per } m \leq x < b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$ Importante è notare il flesso in $x=m$
$E(T(a; m; b)) = (a+b+m)/3$	$Var(T(a; m; b)) = \dots$

Variabile aleatoria **ESPONENZIALE** $E(\mu)$ di parametro μ

È così definita:

Distribuzione o densità	Funzione di ripartizione
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ 	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ è}$  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
$E(E(\mu)) = 1/\mu$	$\text{Var}(E(\mu)) = 1/\mu$

APPROFONDIMENTO. Esiste una stretta

Relazione tra la Poisson (discreta) di parametro λ ($=\mu t$) e l'Esponenziale (continua) di parametro μ

Supponiamo di avere un processo poissoniano di "nascite" (il decadimento radioattivo di una sostanza ne è un esempio; le auto che passano davanti a casa mia durante il giorno costituiscono un altro esempio). La V.A. di Poisson è caratterizzata dal parametro λ che indica il numero di "eventi" nell'unità di tempo scelta (18 decadimenti al minuto; 8 auto all'ora).

Sappiamo che la probabilità che si verifichino k "eventi" nell'unità di tempo scelta è data dalla formula

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Sia $T(t)$ la V.A. continua che misura gli intervalli di tempo tra un "avvenimento" (nascita/evento/transizione) e il successivo. Se, fissato un t , misuriamo un $T > t$ allora nell'intervallo $[0; t]$ non si sono verificati "avvenimenti", allora

$$P(\{T > t\}) = p_0 = e^{-\lambda}$$

La probabilità dell'evento complementare ("si è verificato almeno un avvenimento") è

$$P(\{T \leq t\}) = 1 - p_0 = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\mu t}$$

formula che fa appunto venire in mente la succitata V.A. esponenziale di parametro μ ,

che ha come densità $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ (ovviamente per $t \geq 0$), come media $\frac{1}{\mu}$, e come

funzione di ripartizione appunto la $F(t) = \text{prob}(\{T \leq t\}) = 1 - e^{-\mu t}$

L'area sottesa alla densità $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ tra t_1 e t_2 rappresenta la probabilità che si sia verificato almeno un "avvenimento" tra t_1 e t_2 .

Se dunque un fenomeno di nascite/avvenimenti è descritto dalla Poisson di parametro λ (mediamente λ "avvenimenti" nell'unità di tempo scelta), la V.A. che misura gli intervalli di tempo tra un "avvenimento" e il successivo è la V.A. esponenziale di parametro μ (l'intervallo medio tra un avvenimento e l'altro è $1/\mu$, e il suo reciproco rappresenterà il numero medio di "nascite" nell'unità di tempo).

Spesso, anche per la v.a. esponenziale, **anziché μ si usa λ** (di fatto identificando l'unità di tempo scelta con l'intervallo di tempo cui si riferisce μ).

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

In questo caso (se t è la misura di un qualsiasi intervallo di tempo) l'intervallo medio tra una "nascita" e l'altra (in un processo poissoniano di nascite) è $1/\lambda$, e λ rappresenta il numero medio di "nascite" nell'unità di tempo.

V.A. **NORMALE** $N(\mu; \sigma)$ di media μ e deviazione standard σ

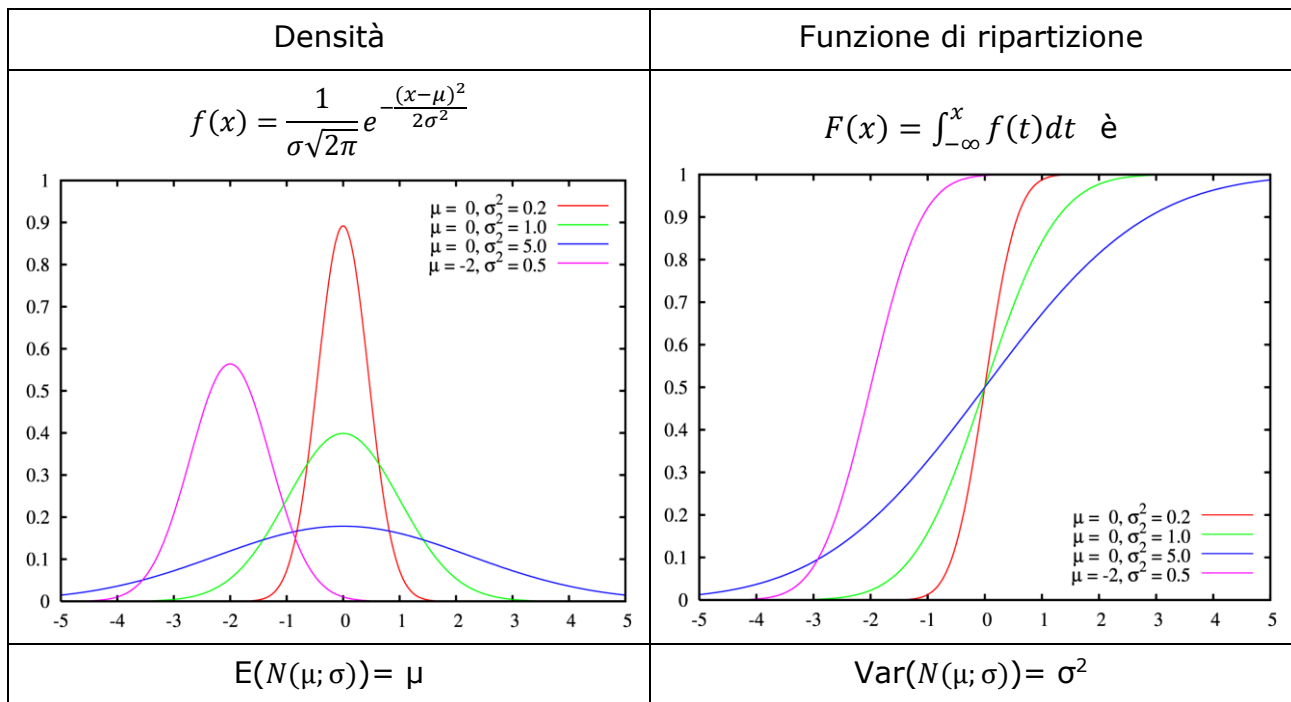
Infine una variabile aleatoria continua che riveste un ruolo fondamentale nel calcolo delle probabilità è la V.A. normale a causa del suo ruolo nel

teorema del limite centrale

Se sommiamo un certo numero di V.A. X_i (discrete o continue che siano) tutte di media μ e deviazione standard σ (cosa possibile attraverso la "ritaratura" $X_i = aX + b$) allora la V.A. $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ tende alla Normale standard $N(0; 1)$ al tendere di n a infinito.

La **distribuzione normale**, o **di Gauss** (o **gaussiana**) dal nome del matematico tedesco Carl Friederich Gauss, ha un grafico simmetrico e ha una forma a campana, nota come **campana di Gauss** (o anche come **curva degli errori**, **curva a campana**).

È spesso usata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali che tendono a concentrarsi attorno a un singolo valor medio.



In verde la $f(x)$ e la $F(x)$ della normale standard.

Si dimostra facilmente che i due **flessi** della "campana" stanno in $x = \mu \pm \sigma$.

È necessario "**normalizzare**" la $N(\mu; \sigma)$ attraverso la sostituzione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ogni qualvolta si voglia calcolare

$$Prob\{x_1 < N(\mu; \sigma) < x_2\} = Prob\left\{\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < N(0; 1) < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right\}$$

Questo perché, non essendo esprimibile l'integrale $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ in forma chiusa mediante funzioni elementari, sono disponibili i valori delle aree sottese alla funzione densità della $N(0; 1)$ dallo 0 a qualsiasi numero decimale con due cifre dopo la virgola fino al 4,00. Vedi tavola di Sheppard sul libro di testo.

La $F(z)$ ivi riportata è l'area sottesa alla $f(x)$ non da $-\infty$ a z ma solo da 0 a z ed equivale alla $F(z) - F(0)$ ovvero $F(z) - 1/2$.

Essendo la $N(0; 1)$ una funzione simmetrica, è sufficiente conoscere la funzione di ripartizione dei valori positivi, per conoscere pure quella dei valori negativi

I valori più noti e usati sono:

$$68,3\% = P\{\mu - 1,00 \sigma < X < \mu + 1,00 \sigma\}$$

$$95,0\% = P\{\mu - 1,96 \sigma < X < \mu + 1,96 \sigma\}$$

$$95,5\% = P\{\mu - 2,00 \sigma < X < \mu + 2,00 \sigma\}$$

$$99,0\% = P\{\mu - 2,58 \sigma < X < \mu + 2,58 \sigma\}$$

$$99,7\% = P\{\mu - 3,00 \sigma < X < \mu + 3,00 \sigma\}$$