

COMPENDIO di GEOMETRIA SOLIDA

Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano. Un piano α divide lo spazio in due semispazi: α è l'origine dei due semispazi. Se il punto A giace internamente a uno dei due semispazi e il punto B giace internamente all'altro semispazio, allora il segmento AB interseca α .

Se una retta passa per due punti distinti di un piano allora tutta la retta giace (è contenuta) nel piano.

Per un punto esterno a un piano passa uno e un solo piano parallelo al piano dato (dal V postulato).

PIANI

Due piani che non abbiano punti in comune si dicono paralleli (e distinti).

Due piani che abbiano un punto P in comune hanno tutta una retta (passante per P) in comune.

Due piani che abbiano due punti P e Q in comune hanno in comune tutta la retta passante per P e Q.

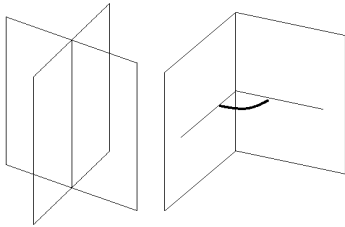
Due piani che abbiano in comune tre punti non allineati... coincidono! (piani paralleli e coincidenti)

La relazioni di parallelismo tra piani è una relazione di equivalenza.

Due piani che abbiano una retta (e solo una) in comune si dicono *secanti*.

L'insieme dei piani dello spazio che passano per una stessa retta forma un **fascio di piani**.

L'insieme dei piani dello spazio che passano per uno stesso punto forma una **stella di piani**.



DIEDRI

Due piani secanti dividono lo spazio in 4 *angoli diedri* (a due a due uguali). La retta in comune è il vertice dei quattro diedri. Due semipiani aventi l'origine in comune individuano due diedri (generalmente uno convesso e uno concavo, a meno che i due semipiani non giacciono su un unico piano, nel qual caso i due diedri sono due semispazi, entrambi convessi). L'**angolo diedro si misura** con l'angolo che formano tra loro due semirette aventi origine in un punto del

vertice del diedro, ciascuna giacente su un lato del diedro ed entrambe perpendicolari alla retta-vertice del diedro. Se tale angolo è retto, il diedro si dice **retto** e i due piani sono tra loro perpendicolari.

TRIEDRI L'intersezione tra tre semispazi i cui piani origine abbiano un punto in comune è un triedro.

RECIPROCA POSIZIONE RETTA-PIANO

Una retta e un piano si dicono **paralleli** se non hanno alcun punto in comune o se la retta giace sul piano.

Una retta e un piano si dicono **incidenti** se hanno un solo punto in comune.

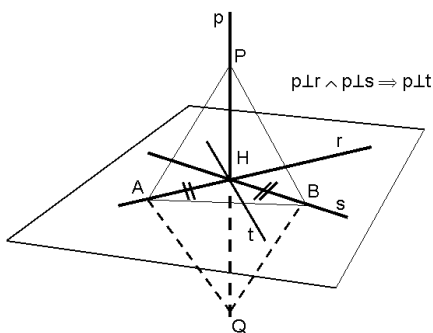
RETTE NELLO SPAZIO.

Due rette nello spazio possano essere **parallele** o **incidenti** (in entrambi i casi giacciono su uno stesso piano) oppure **sghembe** (non hanno nessun punto in comune e non giacciono sullo stesso piano).

Tutte le rette dello spazio che passano per uno stesso punto formano una **stella di rette**.

Angolo tra rette nello spazio: se r e s sono incidenti, l'angolo tra r e s è l'usuale angolo tra rette sul piano; se r e s sono sghembe l'angolo tra di esse è definito come l'angolo che una delle due forma con una qualsiasi retta passante per un suo punto e parallela all'altra.

PERPENDICULARITÀ RETTA – PIANO



Una retta è perpendicolare in H al piano α se è perpendicolare *a tutte* le rette del piano α passanti per H.

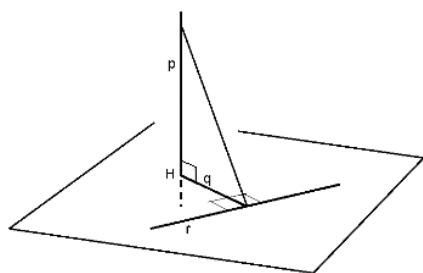
Cond. suff: Una retta è perpendicolare a un piano α in H se è perpendicolare *a due rette distinte* del piano (r ed s) passanti per H.

Teorema di esistenza e unicità: Per un punto dato passa uno e un solo piano perpendicolare alla retta data (la dimostrazione prevede due casi: punto esterno alla retta, punto appartenente alla retta)

Teorema di esistenza e unicità: Per un punto dato passa una e una sola retta perpendicolare al piano dato (ancora due casi: punto esterno al piano, punto appartenente al piano)

Teoremi: rette perpendicolari a un medesimo piano sono tra loro parallele; piani perpendicolari a una medesima retta sono paralleli tra loro.

ANGOLO RETTA-PIANO : l'angolo tra la retta r e il piano α incidenti tra loro in O è l'angolo che la retta r forma con la sua proiezione $p(r)$ sul piano α . Tale angolo è il minimo che la retta r possa formare con qualsiasi altra retta del piano passante per O .



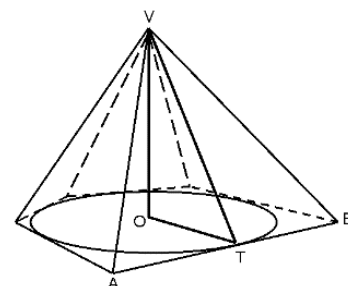
TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI

← Se dal piede H di una perpendicolare p al piano si conduce la perpendicolare q a una retta r del piano, quest'ultima è perpendicolare al piano individuato dalle prime due.

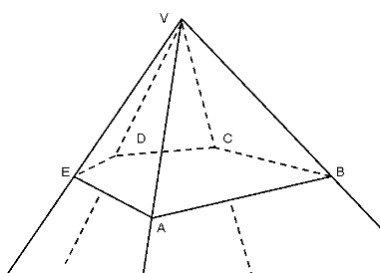
Corollario: in una **PIRAMIDE RETTA** (=il piede dell'altezza è l'**incentro** della base), il

punto di contatto dello spigolo di base con la circonferenza inscritta è il piede dell'altezza della faccia laterale (*apotema*)

Dunque **in una piramide retta tutti gli apotemi sono uguali** $\Rightarrow S_{LAT}=p*a$



ANGOLOIDI



Dato un piano α e un poligono convesso $ABCDE\dots$, congiungendo un punto V esterno al piano con i vertici $A, B, C, D, E\dots$ la figura costituita dagli angoli convessi $AVB, BVC, CVD, \dots$ si dice superficie piramidale indefinita: essa divide lo spazio in due regioni, ciascuna delle quali si dice **ANGOLOIDE**.

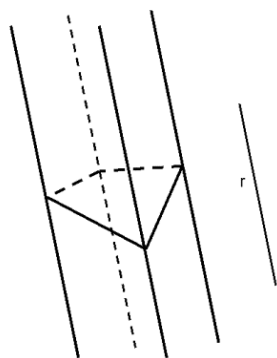
Prenderemo in considerazione l'angoloide convesso o **piramide indefinita**. Il triedro è un particolare angoloide (=piramide triangolare indefinita).

Teorema: la somma delle facce dell'angoloide è minore di un angolo giro.

PIRAMIDE DEFINITA: è intersezione tra un angoloide convesso e un semispazio che contenga il vertice.

Una piramide triangolare è un tetraedro. In essa gli spigoli che non hanno vertici in comune si dicono *opposti*.

PRISMA INDEFINITO



Dato un piano α e un poligono convesso $ABCD\dots$, e una retta r non parallela al piano α , l'insieme delle rette passanti per i punti del poligono e parallele a r è un **PRISMA INDEFINITO**. Le rette che passano per i punti del contorno di $ABCD\dots$ costituiscono la superficie del prisma indefinito, quella che passano per un lato del poligono sono una faccia del prisma.

PRISMA DEFINITO: intersezione tra il prisma indefinito e una striscia solida (i cui piani non siano paralleli alle facce del prisma).

Il **PRISMA** è **RETTO** se le basi sono perpendicolari agli spigoli (o alle facce) laterali

Il **PRISMA** è **REGOLARE** se è retto e ha per base un poligono regolare

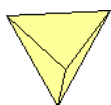
PARALLELEPIPEDO: prisma le cui basi sono parallelogrammi

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO: prisma retto con basi dei rettangoli (tutte le sue facce sono rettangoli).

POLIEDRI REGOLARI (o **SOLIDI PLATONICI**: sono solo cinque. Perché?)

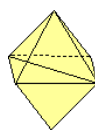
Tetraedro

$h = d_{lati opp} =$

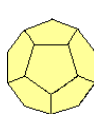


Ottaedro

$d =$



(Penta)dodecaedro



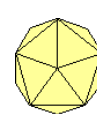
Esaedro o cubo

$d =$



Icosaedro

(20 facce)



$\text{angolo}_{\text{spigolo laterale} - \text{base}} =$

Formula di Eulero per i poliedri: $f+v=s+2$

SUPERFICIE E SOLIDI DI ROTAZIONE

Disegnando una curva su di un semipiano e facendo ruotare il semipiano di un angolo giro attorno alla sua origine (retta a detta asse di rotazione) si ottiene una **superficie di rotazione**.

Se anziché una curva si fa ruotare una figura piana si ottiene un **solido di rotazione**.

SUPERFICIE CILINDRICA INDEFINITA: luogo dei punti dello spazio aventi una data distanza da una retta fissa. Tale distanza è il raggio della superficie cilindrica/rotazione di una retta attorno a una sua parallela. I *punti interni* sono quelli che....

CILINDRO INDEFINITO: l'insieme dei punti di una superficie cilindrica indefinita e dei punti interni ad essa.

CILINDRO DEFINITO: ...

$$S_{\text{LAT}}(\text{cilindro}) = 2\pi r h$$

$$S_{\text{TOT}}(\text{cilindro}) = 2\pi r(r+h)$$

SUPERFICIE CONICA INDEFINITA: superficie di rotazione che si ottiene ruotando una semiretta la cui origine appartenga all'asse di rotazione e formante con esso un angolo α detto *semiapertura* della superficie conica.

CONO INDEFINITO: solido di rotazione che si ottiene ruotando un angolo acuto attorno a un suo lato.

CONO DEFINITO: intersezione tra una cono indefinito di vertice V con un semispazio contenente V e il cui piano origine sia perpendicolare all'asse di rotazione a . In alternativa: rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto.

SUPERFICIE LATERALE DEL CONO: può essere sviluppata sul piano ed è un *settore circolare* di raggio a (=apotema del cono) e arco $2\pi r$ (=circonferenza di base).

$$S_{\text{SETTORE}} : S_{\text{CERCHIO}} = 2\pi r : 2\pi a.$$

$$\text{Dunque } S_{\text{LAT}}(\text{cono}) = \pi r a$$

(MEMO: è equivalente a quella di un triangolo di base $2\pi r$ e altezza a)

$$S_{\text{TOT}}(\text{cono}) = \pi r^2 + \pi r a = \pi r(r+a)$$

SUPERFICIE LATERALE del TRONCO DI CONO

Può essere sviluppata sul piano ed è un

settore di corona circolare di raggi $x+a$ e x , di archi $2\pi R$ e $2\pi r$.

$$S_{\text{SETTORE DI CORONA}} = S_{\text{SETTORONE CIRC.}} - S_{\text{SETTORINO CIRC.}} = \pi R(a+x) - \pi r x.$$

È inoltre $R : r = (a+x) : x$ da cui $x = ra/(R-r)$ Sostituendo...

$$S_{\text{LAT}}(\text{tronco di cono}) = \pi(R+r)a$$

(MEMO: è equivalente a quella di un trapezio di basi $2\pi R$ e $2\pi r$ e altezza a)

Parti della **SUPERFICIE SFERICA**: zona, calotta, fuso, triangolo sferico.

Calcolo della superficie della zona (e della calotta): suddividiamo l'arco AD in n archi uguali $AB=BC=\dots=CD$. Sia $A'D' = h$ = altezza della zona.

Calcoliamo la superficie del pluri-tronco di cono che si ottiene dalla rotazione della spezzata $ABC\dots D$ attorno al diametro.

Sup. lat. del primo tronco di cono: $\pi (AA'+BB')AB \dots$

È $ABB'' \approx OMM'$ (da cui $MM' : AB'' = OM : AB$, da cui $MM' \cdot AB = OM \cdot A'B'$)

È $2MM' = AA'+BB'$.

Dunque: $\text{Sup. lat}_1 = \pi (AA'+BB') \cdot AB = 2\pi MM' \cdot AB = 2\pi OM \cdot A'B'$

$$\text{Sup. lat}_2 = 2\pi OM B'C' \quad \dots \quad \text{Sup. lat}_n = 2\pi OM C'D'$$

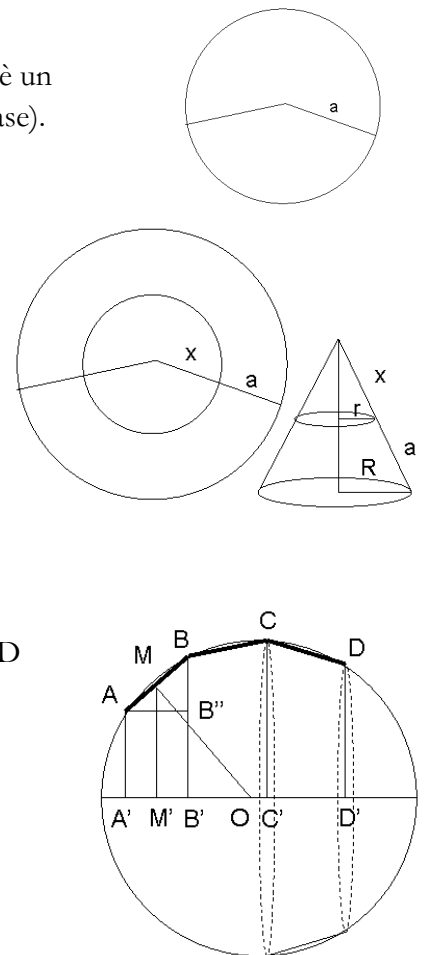
Superficie del pluri-tronco di cono $= 2\pi OM (A'B'+B'C'+\dots+C'D') = 2\pi \cdot OM \cdot h$

Se $n \rightarrow \infty$ allora $OM \rightarrow r$ e il pluri-tronco $\rightarrow$ zona

$$\text{Dunque } S_{\text{ZONA}} = S_{\text{CALOTTA}} = 2\pi r h.$$

La superficie della sfera si ottiene per $h \rightarrow 2r \Rightarrow S_{\text{SFERA}} = 4\pi r^2$.

Superficie di un fuso di angolo $\alpha = \dots$



VOLUMI

In analogia con quanto visto per le aree in classe seconda, si comincia dal VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO, per il quale è facile dimostrare che, se gli spigoli sono $a=\alpha u$, $b=\beta u$ e $c=\gamma u$, allora $V=\alpha\beta\gamma u^3$ ossia $V=\alpha\beta\gamma$ cubetti di lato u .

Principio di Cavalieri

Se due solidi, poggiati sul piano α , sono tali che intersecati con un qualunque piano parallelo ad α individuano sezioni equivalenti (=equiestese), allora i due solidi sono equivalenti (=stesso volume).

Tutti i parallelepipedi aventi basi equivalenti e stessa altezza sono tra loro equivalenti (banale).

Poiché è $V_{\text{PARALLELEPIPEDO}} = A_{\text{base}} \cdot h$, per Cavalieri dunque, anche il volume di qualunque prisma è

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{base}} \cdot h \quad \text{e} \quad V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 h$$

VOLUME DELLA PIRAMIDE

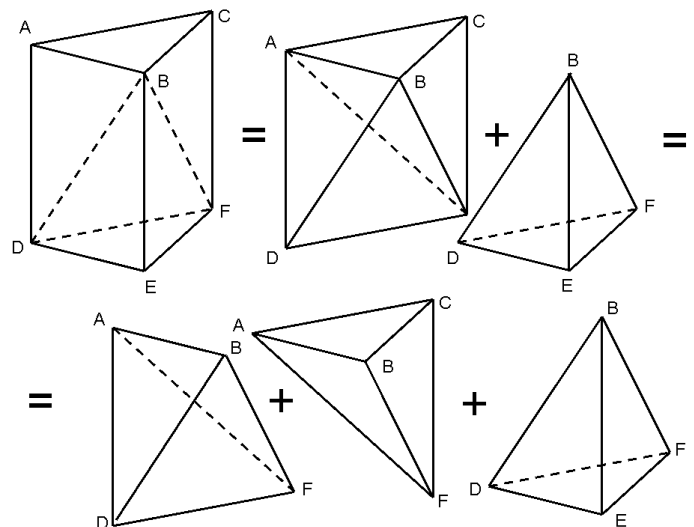
Tutte le piramidi aventi basi equivalenti e stessa altezza sono equivalenti (principio di Cavalieri)

Un prisma a base triangolare può (vedi a lato $\rightarrow$) essere suddiviso in tre piramidi aventi a due a due uguale base e uguale altezza. Dunque

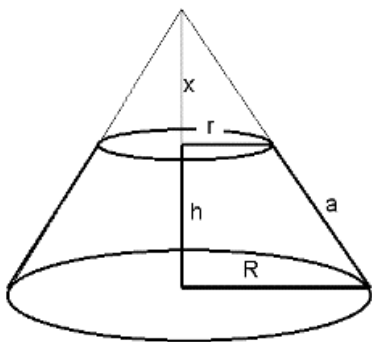
$$V_{\text{PIRAMIDE}} = (1/3) A_{\text{base}} \cdot h$$

Per Cavalieri, il volume di qualsiasi piramide è dato dalla stessa formula, e anche il volume del cono è

$$V_{\text{CONO}} = (1/3) V_{\text{CILINDRO}} = (1/3) \pi r^2 h$$



VOLUME DEL TRONCO DI CONO



Detta h l'altezza del tronco e x l'altezza del cono piccolo

$$R : (h+x) = r : x \quad \text{da cui } x = \dots$$

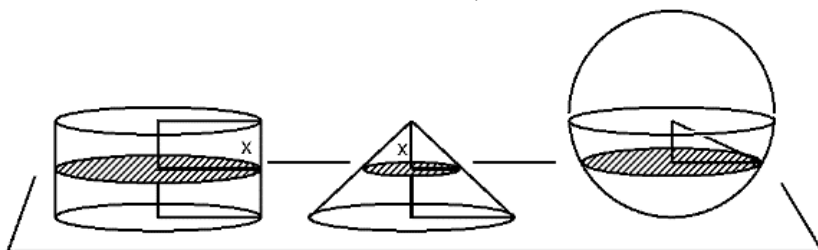
$$\begin{aligned} \text{Volume tronco di cono} &= V_{\text{CONONE}} - V_{\text{CONINO}} = \\ &= (1/3) \pi R^2(h+x) - (1/3) \pi r^2 x = \dots \end{aligned}$$

$$V_{\text{TRONCO DI CONO}} = (1/3) \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

Per il principio di Cavalieri:

$$V_{\text{TRONCO DI PIRAMIDE}} = (1/3) h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

VOLUME DELLA SFERA : cilindro, cono e semisfera abbiano tutti raggio e altezza r . Sezionamoli con un piano parallelo alla base a distanza $r - x$.



La sezione del cilindro (πr^2) equivale alla somma delle sezioni di cono (πx^2) e semisfera ($\pi(r^2 - x^2)$)

Dunque, per Cavalieri,

$$V_{\text{CILINDRO}} = V_{\text{CONO}} + V_{\text{SEMISFERA}}$$

$$\text{ossia } V_{\text{SEMISFERA}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{CONO}} = (2/3) \pi r^3 \Rightarrow V_{\text{SFERA}} = (4/3) \pi r^3$$

Parti della sfera: semisfera, spicchio, segmento sferico a una base, segmento sferico a due basi.