



CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

COMPENDIO PER LEZIONI A DISTANZA



Introduzione

Già 3000 anni fa gli Egizi praticavano un antenato del gioco dei dadi, che si svolgeva lanciando una pietra. Il gioco dei dadi era diffuso anche nell'antica Roma, tanto che sono stati ritrovati alcuni studi su tale gioco risalenti all'età di Cicerone.

Ma la nascita dello studio sistematico del calcolo delle probabilità si fa risalire al 1654, quando il matematico e filosofo **Blaise Pascal**, per soddisfare una richiesta del cavaliere De Meré, accanito giocatore di dadi, cominciò a dedicarsi allo studio dei meccanismi che regolano i giochi d'azzardo, intrattenendo a tale scopo anche un'interessante corrispondenza con il matematico Pierre de Fermat.



EVENTI E PROBABILITÀ

Definiamo evento una qualsiasi affermazione a cui, a seguito di un esperimento o di un'osservazione, si possa assegnare univocamente un grado di verità ben definito.

Esempio: nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:

$E = \text{"esce un numero pari"}.$

Un evento può essere:

certo: se accade con certezza (ad esempio, nel lancio di un dado, è un evento certo $E = \text{"esce un numero minore di 7"}.$);

impossibile: se non può mai accadere (nell'esempio precedente, è impossibile l'evento $E = \text{"esce un numero maggiore di 6"}.$);

casuale (o aleatorio): se può accadere oppure no (nell'esempio precedente, è casuale l'evento $E = \text{"esce un numero minore di 3"}.$).

LA PROBABILITÀ CLASSICA

La probabilità $p(E)$ di un evento casuale E è il rapporto tra il numero f dei casi favorevoli e il numero n dei casi possibili, considerati tutti equiprobabili:

$$p(E) = \frac{f}{n}$$

ESEMPIO. Si estrae una carta da un mazzo di 40 e si considera l'evento:

E = "si estrae una figura".

I casi possibili sono $n=40$, quelli favorevoli sono $f=12$;

la probabilità che si verifichi l'evento E è dunque:

$$p(E) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

OSSERVAZIONI

La probabilità di un **evento impossibile** è 0;

La probabilità di un **evento certo** è 1;

La probabilità di un **evento casuale (o aleatorio)** è compresa tra 0 e 1:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

ESEMPIO. Consideriamo **3 lanci successivi di una moneta**.

Qual è la probabilità di ottenere 2 volte testa (T) e 1 volta croce (C)? I casi possibili sono: TTT – TTC – TCT – TCC – CTT – CTC – CCT – CCC cioè 8; di questi, soltanto 3 sono favorevoli; quindi la probabilità richiesta è:

$$p(E) = \frac{3}{8}$$

Questo è un evento casuale

LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO CONTRARIO

EVENTO CONTRARIO: dato un evento casuale E , si definisce evento contrario di E , e si indica con $\bar{E}$, l'evento che si verifica quando non si verifica E .

Ad esempio, nel lancio di un dado, se consideriamo l'evento

E ="esce un numero multiplo di 3"

l'evento contrario sarà: $\bar{E}$ ="non esce un numero multiplo di 3".

PROBABILITÀ DELL'EVENTO CONTRARIO

Per l'evento E , i casi favorevoli sono 2, cioè se escono o il 3 o il 6;

Per l'evento $\bar{E}$, i casi favorevoli sono 4, cioè tutti i rimanenti: 1, 2, 4 e 5.

Quindi le probabilità sono $p(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Si osserva facilmente che è $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$



LA CONCEZIONE FREQUENTISTICA DELLA PROBABILITÀ

La definizione classica della probabilità non è però applicabile a tutte le situazioni; inoltre la stessa definizione è oggetto di critiche che partono dalla considerazione che: “affermare che tutti i casi sono equiprobabili significa fare a priori una supposizione sulla loro probabilità di verificarsi, utilizzando così nella definizione lo stesso concetto che si vuol definire”!

Per ovviare a tale problema si cominciò a ragionare in un altro modo, utilizzando il concetto di **FREQUENZA RELATIVA**

La frequenza relativa $f(E)$ di un evento sottoposto a n esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto tra il numero v delle volte in cui si è verificato l'evento e il numero n delle prove effettuate:

$$p(E) = \frac{v}{n}$$



ESEMPIO

Se consideriamo il lancio di una moneta e l'evento

$E = \text{"esce testa"}$,

la probabilità classica ci dà il valore: $p(E) = \frac{1}{2}$

Se eseguiamo un numero elevato di lanci, possiamo notare che il numero di volte che esce testa è quasi uguale al numero di volte in cui si presenta croce. Cioè la frequenza relativa dell'evento E si avvicina al valore teorico:

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

Dato un evento casuale E , sottoposto a n prove eseguite tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa

$$\frac{v}{n}$$

tende al valore della probabilità $p(E)$ all'aumentare del numero delle prove effettuate.

Da ciò discende la

DEFINIZIONE STATISTICA DI PROBABILITÀ per la scuola

frequentista: la probabilità di un evento ripetibile coincide con la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero delle prove effettuate è sufficientemente elevato.

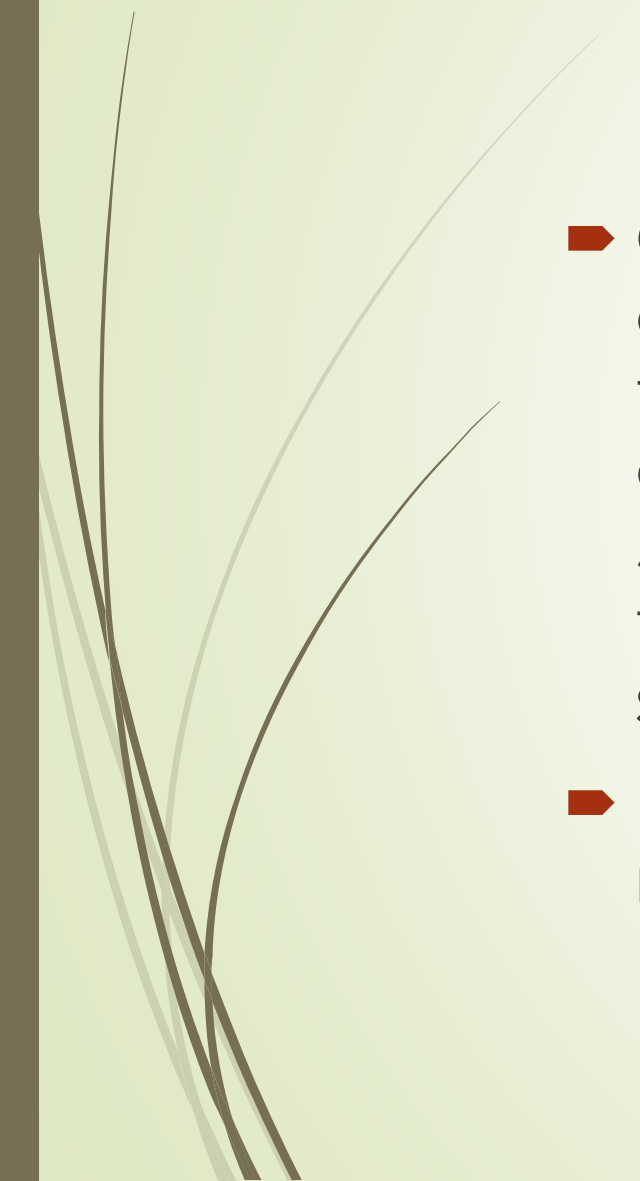


OSSERVAZIONE

- Notiamo che nella definizione “classica” la probabilità è valutata **a priori**, mentre la “frequenza” è un valore valutato **a posteriori**.
- Si utilizza il secondo approccio ad esempio nel campo delle assicurazioni, per valutare la durata media della vita di un individuo, la probabilità dei furti, di incidenti; o ancora nel campo della medicina, per valutare la probabilità di contrarre una certa malattia, oppure la probabilità che un farmaco sia efficace. In tutti questi eventi il calcolo si basa su quanto è avvenuto in passato, valutando la probabilità attraverso il calcolo delle frequenze relative.



SCUOLA SOGGETTIVISTA (De Finetti)

- Osserviamo che anche la definizione di probabilità come frequenza ha i suoi limiti. Non si può applicare a tutti gli eventi che si possono ripetere poche volte o addirittura una volta sola. Qual è la probabilità che la Juve vinca il prossimo campionato? In questo caso non funziona né la definizione classica né la definizione della scuola frequentista.
 - Fu così che nacque la SCUOLA SOGGETTIVISTA, il cui massimo esponente fu l'italiano Bruno de Finetti
- 

LA PROBABILITÀ SECONDO LA SCUOLA SOGGETTIVISTA

- La probabilità è definita come il rapporto tra la cifra (P) che sono disposto a pagare al banco-scommesse per partecipare alla scommessa divisa per la cifra (V=vincita) che il banco-scommesse paga se vinco

$$p(E) = \frac{P}{V}$$

- Occorre però che la scommessa sia coerente: deve cioè essere indifferente recitare la parte dello scommettitore o la parte del banco.



L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

L'impostazione assiomatica della probabilità venne proposta da Kolmogorov nel 1933 in "Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità", sviluppando la ricerca che era ormai cristallizzata sul dibattito fra quanti consideravano la probabilità come limiti di frequenze relative e quanti cercavano un fondamento logico della stessa.

Va notato che la definizione assiomatica non è una definizione operativa e non fornisce indicazioni su come calcolare la probabilità. È quindi una definizione utilizzabile sia nell'ambito di un approccio oggettivista che nell'ambito di un approccio soggettivista.

Il nome deriva dal procedimento per "assiomatizzazione" quindi nell'individuare i concetti primitivi, da questi nell'individuare i postulati (o assiomi) da cui poi si passava a definire i teoremi.



PER COMINCIARE: LO SPAZIO DELLE ALTERNATIVE

SPAZIO DELLE ALTERNATIVE Ω $\circ$ SPAZIO UNIVERSO

Ω è lo “spazio delle alternative”, detto anche “spazio di probabilità” o “spazio degli eventi semplici”.

Tali eventi-alternative devono appunto essere alternativi, cioè a due a due disgiunti.

Pur essendo la teoria consistente indipendentemente da come si assegnano le probabilità ai singoli punti-evento, dalla corretta assegnazione di tali probabilità discende la correttezza dei risultati.

ESEMPI

Per ogni esperimento, costruito l'insieme **universo**, detto anche **spazio delle alternative** Ω o degli eventi semplici, formato da tutti i possibili esiti, si procede ad assegnare le probabilità ai singoli ω_i . La somma delle probabilità di tutti gli ω_i deve essere 1.

LANCIO DI UNA MONETA

ω_i	Testa	Croce
p_i	1/2	1/2

LANCIO DI DUE MONETE

ω_i	2 Teste	1 Testa + 1 Croce	2 Croci
p_i	1/4	1/2	1/4

LANCIO DI UN DADO
NON TRUCCATO

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

LANCIO DI UN DADO TRUCCATO
col quale il 3 esce cinque volte
più spesso degli altri numeri

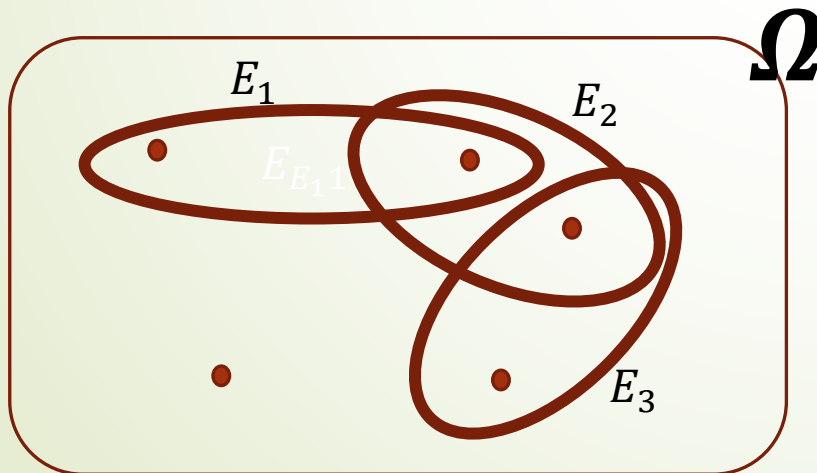
ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/10	1/10	5/10	1/10	1/10	1/10

INSIEME DEGLI EVENTI $\mathcal{E}$

L'insieme degli eventi $\mathcal{E}$ è l'insieme della parti di Ω ,
ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Da come assegniamo le probabilità ai singoli ω_i discendono le probabilità attribuite agli eventi.



$$\mathcal{E} = \{\emptyset ; E_1 ; E_2 ; E_3 ; \dots ; E_n ; \Omega\}$$

DEFINIZIONI

SOMMA LOGICA DI EVENTI (O EVENTO UNIONE):

Dati due eventi elementari E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di Ω , si dice somma logica dei due eventi l'insieme unione $E_1 \cup E_2$.

Esempio: Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1 = "esce un numero pari" = $\{2,4,6\}$ ed E_2 = "esce un multiplo di 3" = $\{3,6\}$. La somma logica sarà l'evento: $E_1 \cup E_2$ = "esce un numero pari o un multiplo di 3" = $\{2,3,4,6\}$.

Riconosciamo la somma logica quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "o".

DEFINIZIONI

PRODOTTO LOGICO DI EVENTI (O EVENTO INTERSEZIONE):

Dati due eventi elementari E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di Ω , si dice prodotto logico l'insieme unione $E_1 \cap E_2$.

Esempio: Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1 = "esce un numero pari" = $\{2,4,6\}$ ed E_2 = "esce un multiplo di 3" = $\{3,6\}$. Il prodotto logico sarà l'evento: $E_1 \cap E_2$ = "esce un numero pari che **è anche** un multiplo di 3" = $\{6\}$.

Riconosciamo il prodotto logico quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "e".

DEFINIZIONI

EVENTI INCOMPATIBILI:

Dati due eventi elementari E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di Ω , essi si dicono *incompatibili* se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Esempio: nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, sono incompatibili gli eventi:

E_1 = "esce una figura" E_2 = "esce un 7"

DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ

Definiamo **probabilità $p(E)$ di un evento E** una funzione che ad ogni evento di $\mathcal{E}$ associa un numero appartenente all'intervallo dei numeri reali

$$p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E \rightarrow P(E)$$

in modo che siano verificati i seguenti 3 assiomi:

1. Per ogni evento E si ha $p(E) \geq 0$
2. L'universo Ω rappresenta l'evento certo: $p(\Omega) = 1$ (**assioma di normalizzazione A1**)
3. Dati n eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ a due a due incompatibili, si ha:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n) \quad (\text{assioma di additività A2})$$

*Nota: Tale numero, come conseguenza degli assiomi 1 e 2, sarà necessariamente compreso tra 0 e 1, tanto che in futuro scriveremo sempre $P: \mathcal{E} \rightarrow [0; 1]$

TEOREMI SULLA PROBABILITÀ

T-1. TEOREMA DELL'EVENTO COMPLEMENTARE:

Dato un evento E , la probabilità dell'evento complementare è:

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$

(la dimostrazione è facile, tenendo conto che $\bar{E} \cup E = \Omega$ e che $\bar{E} \cap E = \emptyset$)

T-2. PROBABILITÀ DELL'EVENTO IMPOSSIBILE:

L'evento impossibile ha probabilità 0: $p(\emptyset) = 0$

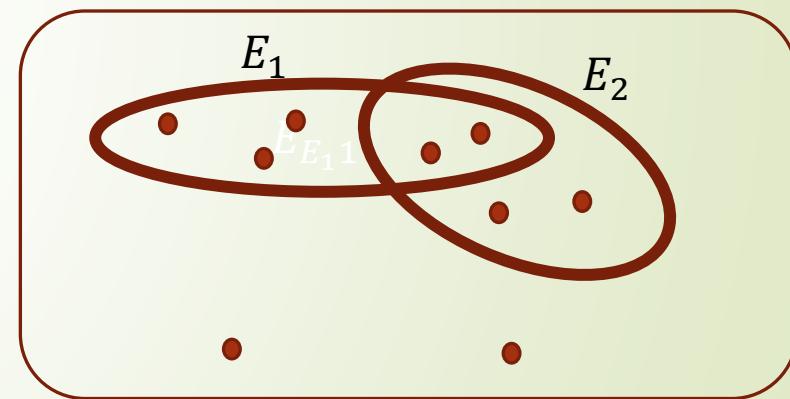
(la dimostrazione è facile, tenendo conto che $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ e che $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$)

TEOREMI SULLA PROBABILITÀ

PROBABILITÀ TOTALE (SOMMA LOGICA):

Dati due eventi E_1 ed E_2 (compatibili o incompatibili), vale la seguente relazione sulla probabilità totale, cioè della somma logica:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$



OSSERVAZIONE: Se gli eventi sono incompatibili, il terzo termine sarà 0 e ciò è in accordo con il terzo assioma.

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Quando la probabilità di un evento E_2 dipende dal verificarsi dell'evento E_1 , si parla di probabilità condizionata e si indica con $p(E_2 | E_1)$ e si legge:

“probabilità di E_2 condizionata ad E_1 ”

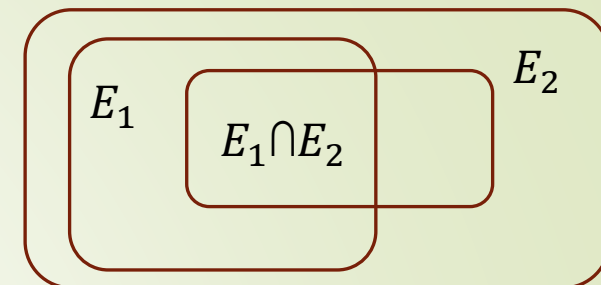
oppure “probabilità di E_2 dato E_1 ”

oppure “probabilità di E_2 supposto che si verifichi E_1 ”

ESEMPIO 1: Si estrae una carta da un mazzo di 40 e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda. Qual è la probabilità che siano due regine? Ovvero, supposto che la prima sia una regina, qual è la probabilità che lo sia anche la seconda?

ESEMPIO 2: Qual è la probabilità che l'Inter vinca la prossima partita supposto che ci sono nove giocatori in infermeria?

PROBABILITÀ CONDIZIONATA



È chiaro che tale probabilità $p(E_1 | E_2)$ è legata all'evento-intersezione. La $p(E_1 | E_2)$ sarà tanto maggiore quanto più grande è l'intersezione $E_1 \cap E_2$

Se supponiamo che la proporzionalità sia diretta è

$$p(E_1 | E_2) = k p(E_1 \cap E_2) \quad \text{qualunque sia } E_1$$

Quanto vale k ? Poiché $p(E_2 | E_2) = k p(E_2 \cap E_2)$ ne segue che

$$1 = k p(E_2) \quad \text{da cui } k = 1 / p(E_2)$$

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$



PROBABILITÀ DELL'EVENTO COMPOSTO

Dal teorema della probabilità condizionata si ricava il teorema della PROBABILITÀ DELL'EVENTO COMPOSTO, che dunque non è altro che il teorema della probabilità condizionata riscritto:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1 | E_2) p(E_2)$$


$$p(R_1 \cap R_2) = p(R_2 | R_1) p(R_1)$$

Esempio: Si estrae una carta da un mazzo di 40 e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda. Qual è la probabilità che siano due regine?
Svolgimento: La probabilità del primo evento $p(R_1)$ è $4/40$, cioè $1/10$. Ma alla seconda estrazione le carte sono diventate 39 e, se vogliamo che la prima sia già una regina, le regine rimaste sono soltanto 3; quindi la probabilità che la seconda carta sia ancora una regina $p(R_2 | R_1)$ sarà diventata $3/39$ cioè $1/13$. Pertanto la probabilità composta (o prodotto logico) sarà data dal prodotto tra la probabilità che la prima carta sia una regina per la probabilità che la seconda sia ancora una regina (sapendo che lo è stata la prima), cioè $1/13$.





EVENTI (STOCASTICAMENTE) INDIPENDENTI

Se sapere qualcosa del verificarsi di E_2 nulla ci dice sul verificarsi di E_1

$$\text{ovvero se } p(E_1|E_2) = p(E_1)$$

(della serie: qual è la probabilità che vinca alla lotteria sapendo che ho indossato un pigiama giallo) allora E_1 **si dice stocasticamente (=nel senso della probabilità) indipendente da E_2** e la probabilità dell'evento composto diventa il prodotto delle singole probabilità.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)$$

EVENTI (STOCASTICAMENTE) INDIPENDENTI

Si lancia due volte un dado. Qual è la probabilità che nel primo lancio esca '5' e che nel secondo esca '2'?

$$p(5_I \cap 2_{II}) = p(2_{II} \cap 5_I) = p(2_{II} | 5_I) p(5_I)$$

Ma chiaramente si tratta di eventi indipendenti: sapere che al primo lancio è uscito '5' non fa variare la probabilità che nel secondo esca '2', che rimane 1/6.

$$p(2_{II} | 5_I) = p(2_{II})$$

Pertanto

$$p(5_I \cap 2_{II}) = p(2_{II} \cap 5_I) = p(2_{II} | 5_I) p(5_I) = p(2_{II}) p(5_I) = 1/36$$



CURIOSITÀ STORICA

Il concetto di indipendenza stocastica tra eventi casuali fu definito per la prima volta nel 1718 da Abraham de Moivre, purtroppo noto al grosso pubblico solo per aver correttamente predetto il giorno della propria morte servendosi di una formula matematica, nel suo libro "The Doctrine of Chance".

In realtà gli studenti (bravi) conoscono De Moivre per la formula della potenza di un complesso scritto in forma trigonometrica, formula che consente di ricavare le N radici N -esime di un complesso.

EVENTI (STOCASTICAMENTE) DIPENDENTI

Se sapere qualcosa del verificarsi di E_2 invece ci dice qualcosa in più sul verificarsi di E_1

ovvero, ad esempio, se $p(E_1|E_2) > p(E_1)$

(della serie: qual è la probabilità che vinca alla lotteria sapendo che ho comprato metà dei biglietti) allora E_1 si dice dipendente da E_2 (in questo caso POSITIVAMENTE CORRELATO con E_2)

Se invece è $p(E_1|E_2) < p(E_1)$

(della serie: qual è la probabilità che vinca alla lotteria sapendo che non ho comprato neanche un biglietto) allora E_1 si dice dipendente da E_2 (in questo caso NEGATIVAMENTE CORRELATO con E_2)

EVENTI CORRELATI

Dato che $p(E_1 \cap E_2) = p(E_2 \cap E_1)$

dal teorema della probabilità condizionata si ricava

$$p(E_1|E_2)p(E_2) = p(E_2|E_1)p(E_1)$$

(che è già la forma semplificata del Teorema di Bayes)

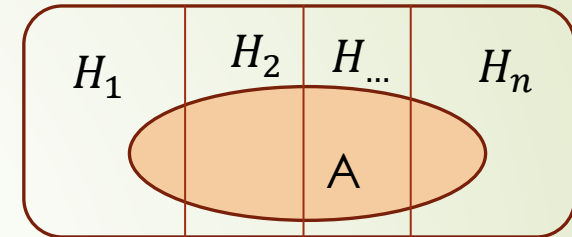
Ovvero

$$\frac{p(E_1|E_2)}{p(E_1)} = \frac{p(E_2|E_1)}{p(E_2)}$$

Se è maggiore (minore) di 1 la frazione di sinistra lo è anche quella di destra: ovvero se E_1 è positivamente (negativamente) correlato con E_2 , anche E_2 è positivamente (negativamente) correlato con E_1 .

Si può quindi parlare semplicemente di eventi positivamente (negativamente) correlati tra loro.

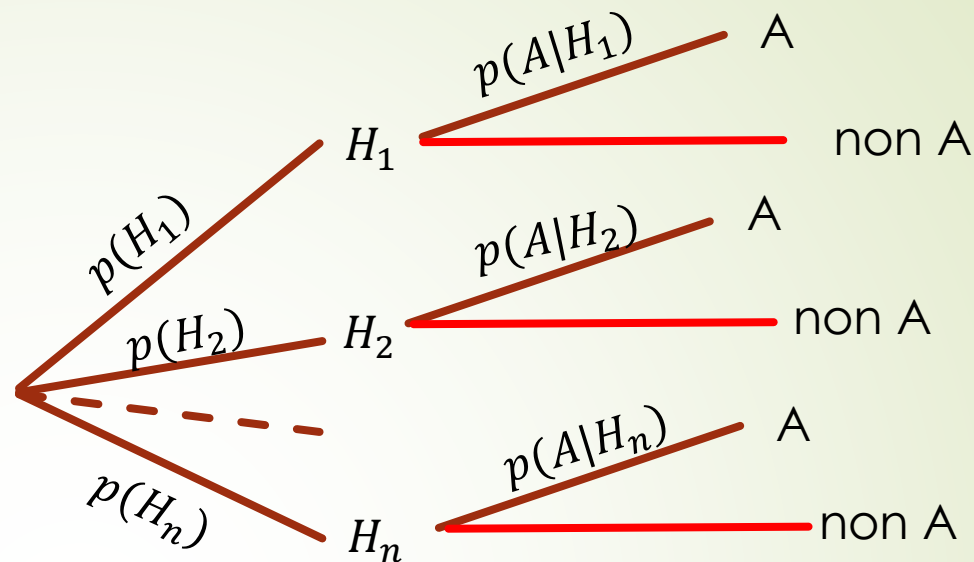
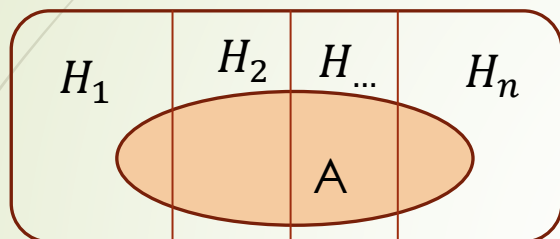
EVENTI che si possono realizzare mediante alternative



Supponiamo che l'evento A si possa verificare sia se si verifica H_1 , sia se si verifica H_2 , sia se si verifica... H_n , e che gli H_i siano tra loro alternativi. Allora A è l'unione disgiunta dei vari $A \cap H_i$

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap H_1) + p(A \cap H_2) + \dots + p(A \cap H_n) = \\ &= p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \dots + p(A|H_n)p(H_n) \end{aligned}$$

DIAGRAMMI AD ALBERO



Ecco che in tali casi si può usare un diagramma ad albero per rappresentare i casi possibili. Questo ci permette di avere un'elencazione grafica di tutti gli elementi dello spazio campione. Se poi si scrive su ciascun ramo la probabilità dell'evento rappresentato nel nodo seguente, la probabilità di uno qualsiasi degli eventi sui rami terminali è data dal prodotto delle probabilità scritte sull'intero percorso, in quanto si tratta di un'applicazione diretta della formula delle probabilità composte.

$$p(A) = p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \dots + p(A|H_n)p(H_n)$$

In pratica:

Lungo i rami (blu) si moltiplicano le probabilità, poi ai margini si addizionano



TEOREMA DI BAYES

Il teorema di Bayes (conosciuto anche come formula di Bayes o **teorema della probabilità delle cause**), deriva da due teoremi fondamentali delle probabilità: il teorema della probabilità condizionata e il teorema della probabilità totale.

Viene impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha scatenato l'evento verificato.

Nel Teorema di Bayes la situazione è “rivoltata”. Si conosce il risultato dell'esperimento e si vuole calcolare la probabilità che sia dovuto ad una certa causa.

Per esempio si può calcolare la probabilità che una certa persona soffra della malattia per cui ha eseguito il test diagnostico (nel caso in cui questo sia risultato negativo) o viceversa non sia affetta da tale malattia (nel caso in cui il test sia risultato positivo), conoscendo la frequenza con cui si presenta la malattia e la percentuale di efficacia del test diagnostico.

TEOREMA DI BAYES

In pratica si vuol conoscere $p(E_1|E_2)$ conoscendo $p(E_2|E_1)$

Il teorema di Bayes (in forma semplificata), l'abbiamo già scritto qualche diapositiva fa:

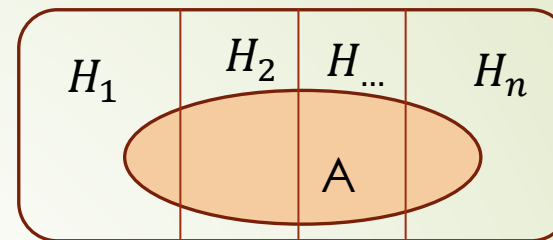
$$p(E_1|E_2)p(E_2) = p(E_2|E_1)p(E_1)$$

Per avere il teorema di Bayes è sufficiente esplicitare $p(E_1|E_2)$

$$p(E_1|E_2)p(E_2) = p(E_2|E_1)p(E_1)$$

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_2|E_1)p(E_1)}{p(E_2)}$$

TEOREMA DI BAYES



Supponiamo che l'evento A = 'paio di scarpe difettose' possa realizzarsi sia nella linea di produzione H_1 , sia nella linea di produzione H_2 , sia... nella linea di produzione H_n della fabbrica F .

La probabilità che un paio di scarpe finito preso a caso sia difettoso è data da

$$p(A) = p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \dots + p(A|H_n)p(H_n)$$

Ora ci chiediamo: sapendo che il paio di scarpe che abbiamo preso in mano è difettoso, qual è la probabilità che venga dalla linea di produzione... H_1 (tanto per citarne una)?

$$p(H_1|A) = \frac{p(A|H_1)p(H_1)}{p(A)}$$

$$p(H_1|A) = \frac{p(A|H_1)p(H_1)}{p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \dots + p(A|H_n)p(H_n)}$$

ESPERIMENTO BERNOULLIANO

- Si dice esperimento bernoulliano un esperimento che può presentare due risultati che chiameremo SUCCESSO (S) e INSUCCESSO (I)

ω_i	Successo (S)	Insuccesso (I)
p_i	p	$1 - p$

- Esempio: nel lancio di un dado, il successo sia $S = \{2; 3\}$

ω_i	Successo $S = \{2; 3\}$	Insuccesso $I = \{1; 4; 5; 6\}$
p_i	$1/3$	$2/3$

ESPERIMENTO BERNOULLIANO

ripetuto N volte

Ripetiamo l'esperimento bernoulliano N volte e ci chiediamo qual è la probabilità di avere successo k volte su N . In questo caso Ω è costituito dai numeri naturali da 0 a N .

ω_i	0	1	2	...	k	...	N
p_i	$\binom{N}{0} p^0 (1-p)^N$	$\binom{N}{1} p^1 (1-p)^{N-1}$	$\binom{N}{2} p^2 (1-p)^{N-2}$		$\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$		$\binom{N}{N} p^N (1-p)^0$