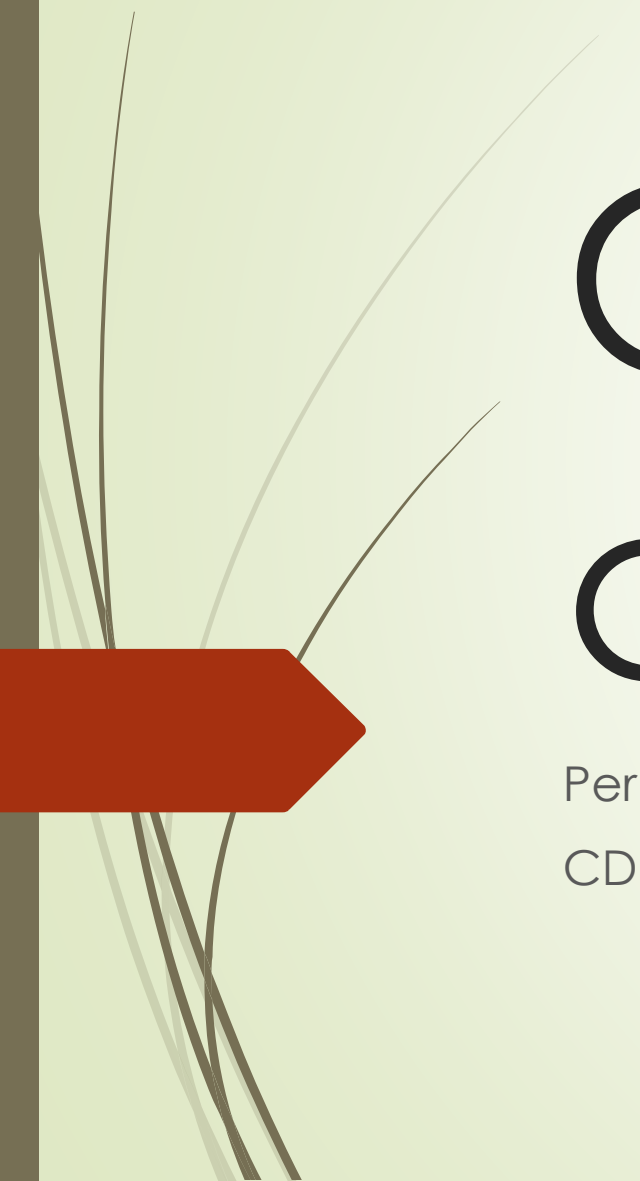




Calcolo combinatorio

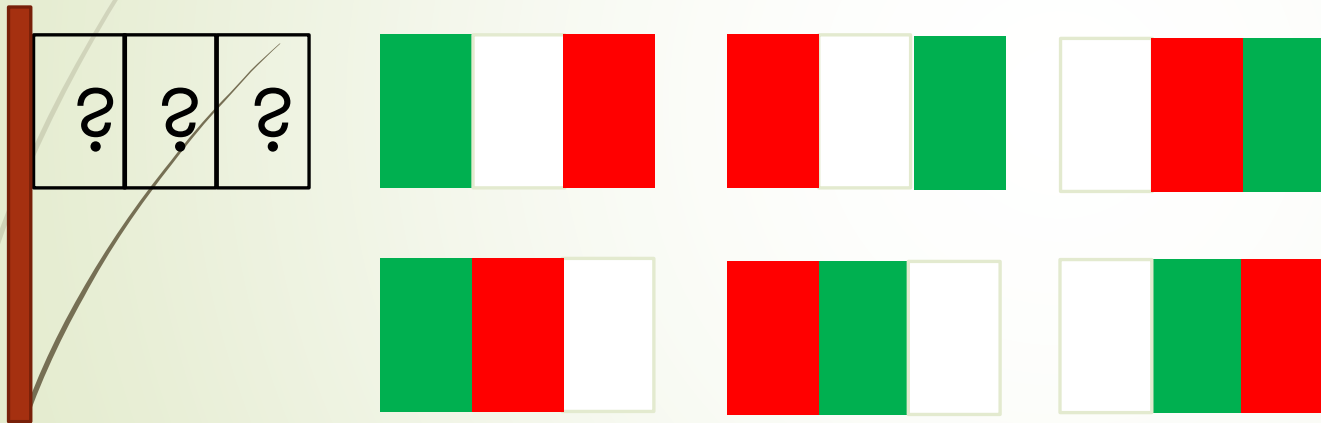
Per lezioni a distanza

CD

Permutazioni semplici

In quanti modi posso costruire una bandiera di tre colori (verde, bianco, rosso)?

Cioè in quanti modo posso «permutare» tra loro nell'ordine 3 oggetti distinti?



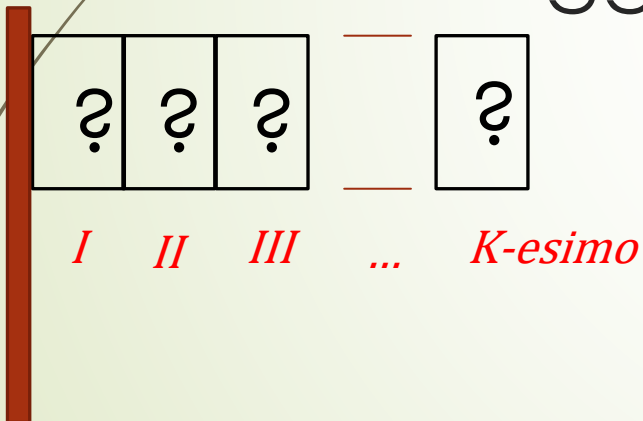
$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

Si legge «3 fattoriale»

Ho 3 scelte per il I colore (quello vicino all'asta), 2 per il II (perché uno l'ho già utilizzato) e una sola scelta per il III: per la bandiera dei tre colori ho dunque $3 \times 2 \times 1$ possibili permutazioni: 6 in tutto.

Permutazioni semplici di k oggetti (distinti tra loro)

Se dovessi permutare tra loro k
oggetti la formula è presto fatta



Si legge: p k uguale k fattoriale

$$P_k = k!$$

$$k! = k(k-1)(k-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Anagrammi

Quanti sono gli anagrammi della parola AMOR?

Si tratta di PERMUTARE tra loro le quattro lettere distinte A, M, O, R della parola: in tutto

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

AMOR	MAOR	OAMR	RAMO
AMRO	MARO	OARM	RAOM
AOMR	MOAR	OMAR	RMAO
AORM	MORA	OMRA	RMOA
ARMO	MRAO	ORAM	ROAM
AROM	MROA	ORMA	ROMA

Solo 8 hanno un significato nella lingua italiana

Anagrammi con ripetizione

Quanti sono gli anagrammi della parola NONNA? Qui c'è una lettera ripetuta.

Ora, se quelle N fossero tra loro distinte (NONNA) le permutazioni sarebbero $5!$ (NONNA sarebbe distinto da NONNA). In realtà le N tra loro non si distinguono. In quanti modi posso permutare tra loro le N e avere la stessa parola? In $3!$ modi.

Quindi gli anagrammi in tutto sono $\frac{5!}{3!}$ cioè 20.

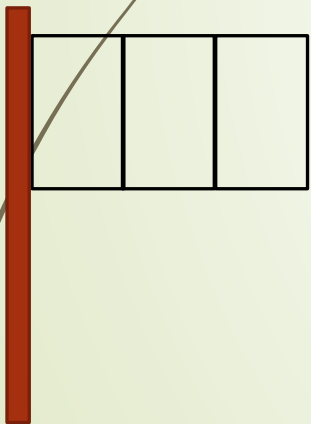
Quanti sono gli anagrammi della parola NONNO? Qui anche la O è ripetuta.

Quindi gli anagrammi in tutto sono $\frac{5!}{3! 2!}$ cioè 10.

NNNO NNNO NNOO
NONNO NONON NOONN ONNNO
ONNON ONONN OONNN

Disposizioni semplici di k oggetti scelti da n

In quanti modi posso costruire una bandiera di k colori (immagina 3) potendoli scegliere da n (con $n \geq k$) (immagina 5) **colori diversi senza ripetizioni**?



Ho 5 scelte per riempire la prima casella, 4 scelte per riempire la seconda, 3 scelte per riempire la terza. In totale: $D_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 120$

In generale dunque:

k fattori a partire da n

$$D_{n,k} = \underset{I}{n}(\underset{II}{n-1})(\underset{III}{n-2}) \dots (n - \underset{k-esimo}{k+1})$$

Si legge: D n k

Un esercizio (Come si scrivono le cose)

$$2 \cdot D_{x-1,3} - D_{x+1,3} = 2 \cdot D_{x,2}$$

L'equazione è equivalente al sistema

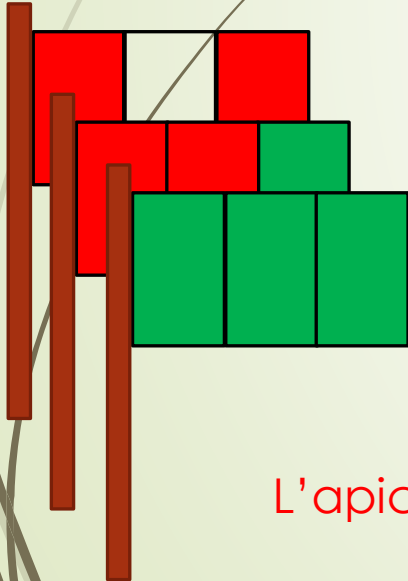
$$\left\{ \begin{array}{l} x \in N \text{ and } \begin{array}{l} x - 1 \geq 3 \\ x + 1 \geq 3 \\ x \geq 2 \end{array} \\ 2(x-1)(x-2)(x-3) - (x+1)x(x-1) = 2x(x-1) \end{array} \right. \quad \text{ovvero} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in N \\ x \geq 4 \\ 2(x-2)(x-3) - (x+1)x = 2x \end{array} \right.$$

In questo tipo di equazioni ci sono molti fattori sicuramente positivi, che dunque si possono semplificare.

Guai a chi dimentica di scrivere il sistema e alla fine usa termini ridicoli come 'accettabile' o 'inaccettabile'.

Disposizioni di k oggetti scelti da n con ripetizione

In quanti modi posso riempire k caselle ordinate scegliendo gli elementi con cui riempirle da n elementi possibili, anche con ripetizione?



Esempio: Devo costruire una bandiera a 3 bande verticali e posso scegliere tra 5 colori, eventualmente ripetuti, anche vicini. Ho 5 scelte per riempire la prima casella, ancora 5 scelte per riempire la seconda, e ancora 5 scelte per riempire la terza. In totale 5^3 scelte.

L'apice indica: 'con ripetizione'

$$D'_{n,k} = \underset{I}{n} \cdot \underset{II}{n} \cdot \cdots \cdot \underset{k\text{-esimo}}{n} = n^k$$

k fattori uguali a n

Combinazioni semplici

In quanti modi posso costruire una coccarda o un mazzolino (**non mi interessa più l'ordine**) di k colori scegliendoli da n possibili distinti?

OSSERVAZIONE: rifacendoci all'esempio precedente, scelti 3 colori tra i 5 possibili, tutte le permutazioni di questi 3 colori danno origine alla stessa combinazione. Tutte le disposizioni che contengono gli stessi colori costituiscono dunque la medesima combinazione.


$$C_{n,k} = \frac{\overset{I}{n} \overset{II}{(n-1)} \overset{III}{(n-2)} \dots \overset{k\text{-esimo fattore}}{(n-k+1)}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

Combinazioni semplici: una formula finita

Sono brutte le formule con i puntini. Nel caso delle $C_{n,k}$ notiamo che moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per $(n - k)!$ si ottiene una splendida formula finita:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(n-k)!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Un esercizio (Come si scrivono le cose)

La disequazione

$$\binom{x}{x-3} \geq \frac{10}{3} \binom{x}{5}$$

è
equivalente
al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 5 \\ \frac{\cancel{x!}}{\cancel{(x-3)!} 3!} \geq \frac{10}{3} \frac{\cancel{x!}}{5! \cancel{(x-5)!}} \\ \phantom{\frac{\cancel{x!}}{\cancel{(x-3)!} 3!} \geq \frac{10}{3} \frac{\cancel{x!}}{5! \cancel{(x-5)!}}} \textcolor{red}{(x-3)(x-4)} \phantom{\geq \frac{10}{3} \frac{\cancel{x!}}{5! \cancel{(x-5)!}}} \textcolor{blue}{5 \cdot 4} \end{array} \right.$$

a sua volta equivalente al
sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 5 \\ 5 \cdot 4 \cdot 3 \geq 10(x-3)(x-4) \end{array} \right.$$

Nella disequazione abbiamo tranquillamente semplificato i fattoriali perché i fattori sono... tutti positivi.

A proposito: ci sono solo
due numeri che vanno

bene: $S = \{5; 6\}$

Coefficienti binomiali

Le $C_{n,k}$ (combinazioni semplici di k oggetti da n) vengono indicate anche con le parentesi tonde (senza linea di frazione). In tal caso prendono il nome di **coefficienti binomiali**

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

Questo perché compaiono nello sviluppo della potenza di binomio.

NOTA BENE: per ragioni di coerenza si pone (per definizione) $0! = 1$

(La cosa è ovvia se vogliamo che la formula abbia senso anche per $k = 0$ e per $k = n$)

Proprietà dei coefficienti binomiali

In quanti modi posso scegliere 0 oggetti da n ? In un solo modo: non sceglierne alcuno.

$$\binom{n}{0} = 1$$

In quanti modi posso scegliere 0 oggetti da 0? In un modo solo.

$$\binom{0}{0} = 1$$

Legge delle classi complementari

In quanti modi posso scegliere k oggetti da n ? In tanti quanti posso scartarne $(n - k)$ da n .

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$$

Combinazioni con ripetizione

In quanti modi posso distribuire k elementi indistinguibili tra n cassette?

In questo caso non è necessario che k sia minore o uguale a n .

ESEMPIO: Ho 4 monete indistinguibili da distribuire in 3 cassette (che chiamo a, b, c).

Posso metterle tutte e 4 in un cassetto (e ho 3 possibilità); oppure 3 in un cassetto e una in un altro (e ho 6 possibilità); 2 in un cassetto e 2 in un altro (e ho 3 possibilità); 2 in un cassetto e una in ciascuno degli altri 2 (e ho 3 possibilità). In totale: 3+6+3+3 possibilità.

Si capisce che se avessi 18 monete da distribuire in 7 cassette con questo metodo impazzirei. **Occorre un'idea... anzi: L'IDEA!**

a a a a
b b b b
c c c c

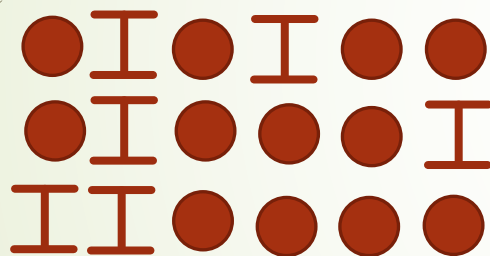
a a a b
a a a c
a b b b
b b b c
a c c c
b c c c

a a b b
a a c c
b b c c

Combinazioni con ripetizione

ESEMPIO: Ho 4 monete indistinguibili da distribuire in 3 cassette.

L'IDEA: Per individuare i 3 cassette bastano 2 sbarrette verticali. Ogni combinazione possibile sarà una precisa sequenza di pallini e di sbarrette.



Una nel I cassetto, una nel II cassetto, due nel III

Una nel I, tre nel II, zero nel III

Tutte e quattro nel III cassetto

Il quesito allora diventa: in quanti modi posso scegliere le 4 posizioni per i pallini nella sequenza di 6 ($= 4 + 3 - 1$) posti per i 6 simboli (4 pallini e 2 sbarrette)?

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!}$$

Il Triangolo di Tartaglia

Tutti ricordano come si sviluppa la potenza di binomio:
utilizzando il **Triangolo di Tartaglia**

$$(A + B)^0 = 1$$

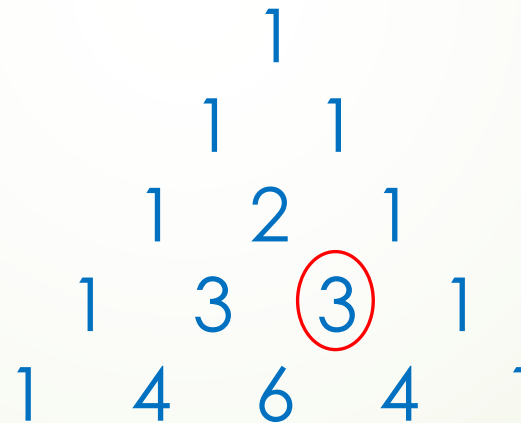
$$(A + B)^1 = 1A + 1B$$

$$(A + B)^2 = 1A^2 + 2AB + 1B^2$$

$$(A + B)^3 = 1A^3 + 3A^2B + \textcircled{3}AB^2 + 1B^3$$

Riscriviamo la potenza come prodotto ripetuto

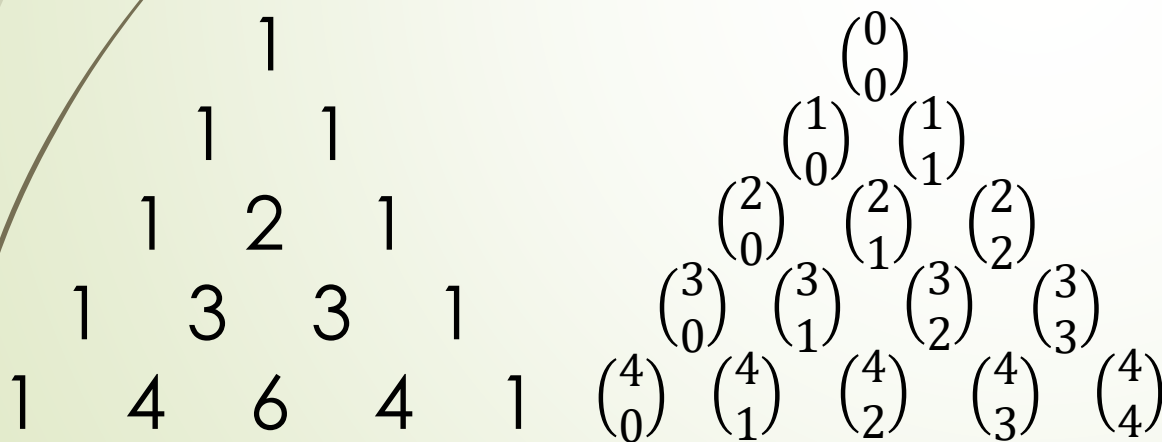
$$(A + B)^3 = (A + B)(A + B)(A + B) = \dots = 1A^3 + 3A^2B + \textcolor{red}{3}AB^2 + 1B^3$$



Per ottenere – ad esempio – il termine in AB^2 devo prendere come fattori dalle 3 parentesi tonde due B e un A: BBA, BAB, ABB. Il coefficiente di AB^2 è la risposta alla seguente domanda: in quanti modi posso scegliere le 2 parentesi da cui prendere due B tra le 3 possibili? Risposta: $\textcolor{red}{\binom{3}{2}}$

Triangolo di Tartaglia e Binomio di Newton

Il triangolo di Tartaglia può essere visto (e scritto) allora in un altro modo e la potenza di binomio può essere scritta secondo la celebre formula di Newton



The image displays two versions of Pascal's Triangle. The left version is the standard numerical representation, and the right version uses binomial coefficients in fractional notation.

Standard Numerical Representation:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ & 1 & 2 & & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & & 1 & \end{array}$$

Binomial Coefficient Representation:

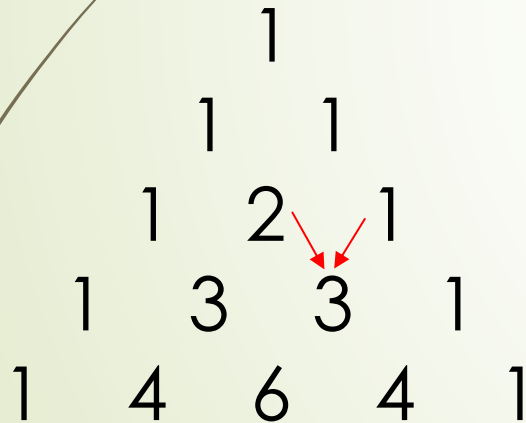
$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \end{array}$$

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Costruire il triangolo di Tartaglia

Formula di Stifel

Tutti ricordano come si costruisce il triangolo di Tartaglia: ogni numero è la somma dei due che gli stanno sopra.



Sommando il k -esimo e il $(k+1)$ -esimo elemento della n -esima riga si ottiene il $(k+1)$ -esimo della $(n+1)$ -esima riga

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Questa è la formula di Stifel, e la sua dimostrazione è facile:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

È sufficiente fare il m.c.m. da entrambe le parti e a sinistra eseguire la somma per vedere che si tratta di una identità.