

Sulle equazioni/disequazioni e sistemi equivalenti

Equazioni/Disequazioni con modulo elementari

$$|A(x)| < B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases} \quad \sim \quad \dots$$

$$|A(x)| = B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \text{ vel } A(x) = -B(x) \end{cases} \quad \sim \quad \dots$$

$$|A(x)| > B(x) \quad \sim \quad A(x) < -B(x) \text{ vel } A(x) > B(x) \quad \sim \quad \dots$$

... con l'ovvia attenzione ai predicati "larghi"

UN ESEMPIO: $|x - 1| - 3|x + 2| > 4x$ è equivalente alla disgiunzione logica

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} -x + 1 + 3x + 6 > 4x \\ -x + 1 - 3x - 6 > 4x \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 + 3x + 6 > 4x \\ x - 1 - 3x - 6 > 4x \end{cases}$$

... Se invece si prepara prima il classico grafico dei segni degli argomenti, che fornisce una utile partizione dei "casi sensati", la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x < -2 \\ -x + 1 + 3x + 6 > 4x \end{cases} \text{ vel } \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ -x + 1 - 3x - 6 > 4x \end{cases} \text{ vel } \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 - 3x - 6 > 4x \end{cases} \sim \dots$$

alla quale comunque si giungerebbe dopo il primo passaggio;
e se invece si usano le equivalenze in alto, abbiamo che

$$|x - 1| - 3|x + 2| > 4x \quad \sim \quad |x - 1| > 4x + 3|x + 2| \quad \sim$$

$$\sim \quad x - 1 < -4x - 3|x + 2| \quad \text{vel} \quad x - 1 > 4x + 3|x + 2| \quad \sim$$

$$\sim \quad 3|x + 2| < 1 - 4x \quad \text{vel} \quad 3|x + 2| < -3x - 1 \quad \sim$$

$$\sim \quad \begin{cases} 3x + 6 < 1 - 4x \\ 3x + 6 > -1 + 4x \end{cases} \text{ vel } \begin{cases} 3x + 6 < -3x - 1 \\ 3x + 6 > 3x + 1 \end{cases}$$

...

Equazioni e disequazioni irrazionali elementari

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{vel} \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \quad \sim \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

In presenza di più radicali è sempre opportuno scrivere il sistema equivalente ed evitare sempre la scrittura ridondante di *condizioni superflue* (e abituare i ragazzi a riconoscerle subito e a eliminarle)

Equazioni e disequazioni logaritmiche elementari

$$\log A(x) > \log B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$$

$$\log A(x) < B(x) \quad \sim \quad \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < e^{B(x)} \end{cases}$$

$$\log A(x) > B(x) \quad \sim \quad A(x) > e^{B(x)}$$

DEPRECABILE l'uso di lasciare le C.E. o C.R. isolate nel foglio "in alto a destra".

Ci si aspetta che in III e in IV gli allievi si siano appropriati in modo sicuro (magari fin dalla classe prima) del **concetto di equivalenza logica**.

Importante all'uopo (...uopo!) ricordare le **proprietà distributive**

- della congiunzione rispetto alla disgiunzione
 $A \text{ and } (B \text{ vel } C) = (A \text{ and } B) \text{ vel } (A \text{ and } C)$ con A, B, C predicati aperti qualunque (equazioni o disequazioni o a loro volta sistemi)

$$\begin{cases} A \\ B \text{ vel } C \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ vel } \begin{cases} A \\ C \end{cases}$$

- della disgiunzione rispetto alla congiunzione (meno frequente)
 $A \text{ vel } (B \text{ and } C) = (A \text{ vel } B) \text{ and } (A \text{ vel } C)$

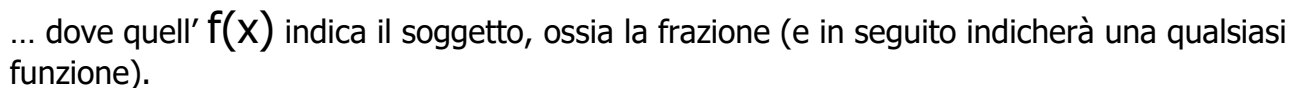
Quello che ci si aspetta è che vengano studiati solo i fattori di cui è arduo stabilire il segno **a mente**; il segno degli altri verrà subito rappresentato nel grafico che riporta in colonna i vari fattori (magari prima quelli del numeratore e poi quelli del denominatore).

In questo esercizio l'unico fattore che davvero merita uno studio è quello irrazionale. E visto che lo studio del segno di un fattore ciascuno lo conduce come vuole, la cosa più rapida in questo caso è cercare quando il fattore irrazionale è negativo (un solo sistema)

Ovviamente il fattore è nullo in 1.

Ci si attende allora il seguente grafico dei segni dei vari fattori. (Abbiamo concordemente adottato la linea continua per indicare dove il fattore è positivo; ma se qualche collega intende continuare a usare il "+", come magari si fa in prima, è liberissimo, e ciò ha anche le sue motivazioni didattiche. Arrivati a questo punto del percorso dovrebbe in ogni caso risultare *criminale* confondere i due tipi di grafico.)

(N.B.: **piazzare** sempre per primi **gli zeri**)



“Solo a questo punto si controlla il verbo che caratterizza il predicato”: quante volte l’abbiamo ripetuto agli studenti! Ed è ovvio che il grafico sopra, essendo il grafico di un “sogetto”, non può mutare se cambia il verbo.

Molti colleghi, anche di chiara fama [MA NON DEL NOSTRO LICEO, CLARO QUE NO!], tendono a sovrapporre al *grafico di segno* simboli o informazioni dedotte dal predicato, cosa – se non moralmente illecita – decisamente controproducente quando ai ragazzi in quarta e in quinta viene chiesto di studiare il segno di una funzione.

$$S = [-3; 0[\cup [1; 2] \cup [4; 9[$$