

AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO

CERCANDO SOLAMENTE LE INTERSEZIONI RETTA-PARABOLA

Prendiamo una parabola di passo qualsiasi (dipende solo da a) ... ma comoda (col vertice nell'origine)

$$y = ax^2$$

e prendiamo due punti che stanno sulla parabola $A(x_A; ax_A^2)$ e $B(x_B; ax_B^2)$

La **retta che passa per A e B** ha equazione

$$y - ax_A^2 = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

semplifichiamo la frazione ed esplicitiamo la y : $y = a(x_B + x_A)(x - x_A) + ax_A^2$

in forma canonica è: $y = a(x_B + x_A)x - ax_Ax_B$

in forma implicita è: $a(x_B + x_A)x - y - ax_Ax_B = 0$

Dimostriamo che **il punto L di Lagrange della parabola (ovvero il vertice dell'altezza del segmento parabolico) ha ascissa** $\frac{x_B + x_A}{2}$

In classe terza si sfrutta la formula che dà il coefficiente angolare della tangente alla parabola in un punto di essa:

$$m = 2ax_0 + b$$

(in questo caso semplicemente $m = 2ax_0$)

Il punto in cui il coefficiente angolare della tangente è quello della retta per gli estremi soddisfa l'uguaglianza

$$2ax_0 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}$$

ovvero

$$x_0 = \frac{x_B + x_A}{2}$$

In classe quinta si usa il teorema di Lagrange

$$y' = 2ax$$

esiste un c nell'intervallo ... tale che ... $2ac = \frac{ax_B^2 - ax_A^2}{x_B - x_A}$ da cui $c = \frac{x_B + x_A}{2}$

Il punto di Lagrange ha dunque coordinate $L\left(\frac{x_B+x_A}{2}; a\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)^2\right)$

La base **b** del segmento parabolico è lunga

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| \sqrt{1 + m_{AB}^2} = |x_B - x_A| \sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2}$$

L'altezza **h** del segmento parabolico è

$$\begin{aligned} d(L; retta_{AB}) &= \frac{\left| a(x_B + x_A) \frac{x_B + x_A}{2} - a\left(\frac{x_B + x_A}{2}\right)^2 - ax_Ax_B \right|}{\sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2}} = \\ &= |a| \frac{\left| \left(\frac{x_B + x_A}{2}\right)^2 - x_Ax_B \right|}{\sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2}} = \frac{|a|}{4} \frac{(x_B - x_A)^2}{\sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2}} \end{aligned}$$

Area del segmento parabolico secondo il Teorema di Archimede: $A = \frac{2}{3}bh$

$$A = \frac{2}{3} |x_B - x_A| \sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2} \cdot \frac{|a|}{4} \frac{(x_B - x_A)^2}{\sqrt{1 + a^2(x_B + x_A)^2}} =$$

$$A = \frac{|a|}{6} |x_B - x_A|^3$$

Area del segmento parabolico calcolata con gli integrali

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{x_A}^{x_B} [a(x_B + x_A)x - ax_Ax_B - ax^2] dx \right| \\ &= |a| \left| \left[(x_B + x_A) \frac{x^2}{2} - x_Ax_Bx - \frac{x^3}{3} \right]_{x_A}^{x_B} \right| \\ &= |a| \left| (x_B + x_A) \frac{x_B^2 - x_A^2}{2} - x_Ax_B(x_B - x_A) - \frac{x_B^3 - x_A^3}{3} \right| = \end{aligned}$$

raccogliamo il fattor comune $x_B - x_A$

$$\begin{aligned} &= |a| |x_B - x_A| \left| (x_B + x_A) \frac{x_B + x_A}{2} - x_Ax_B - \frac{x_B^2 + x_Bx_A + x_A^2}{3} \right| \\ &= |a| |x_B - x_A| \left| \frac{x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2}{6} \right| = \frac{|a|}{6} |x_B - x_A|^3 \end{aligned}$$